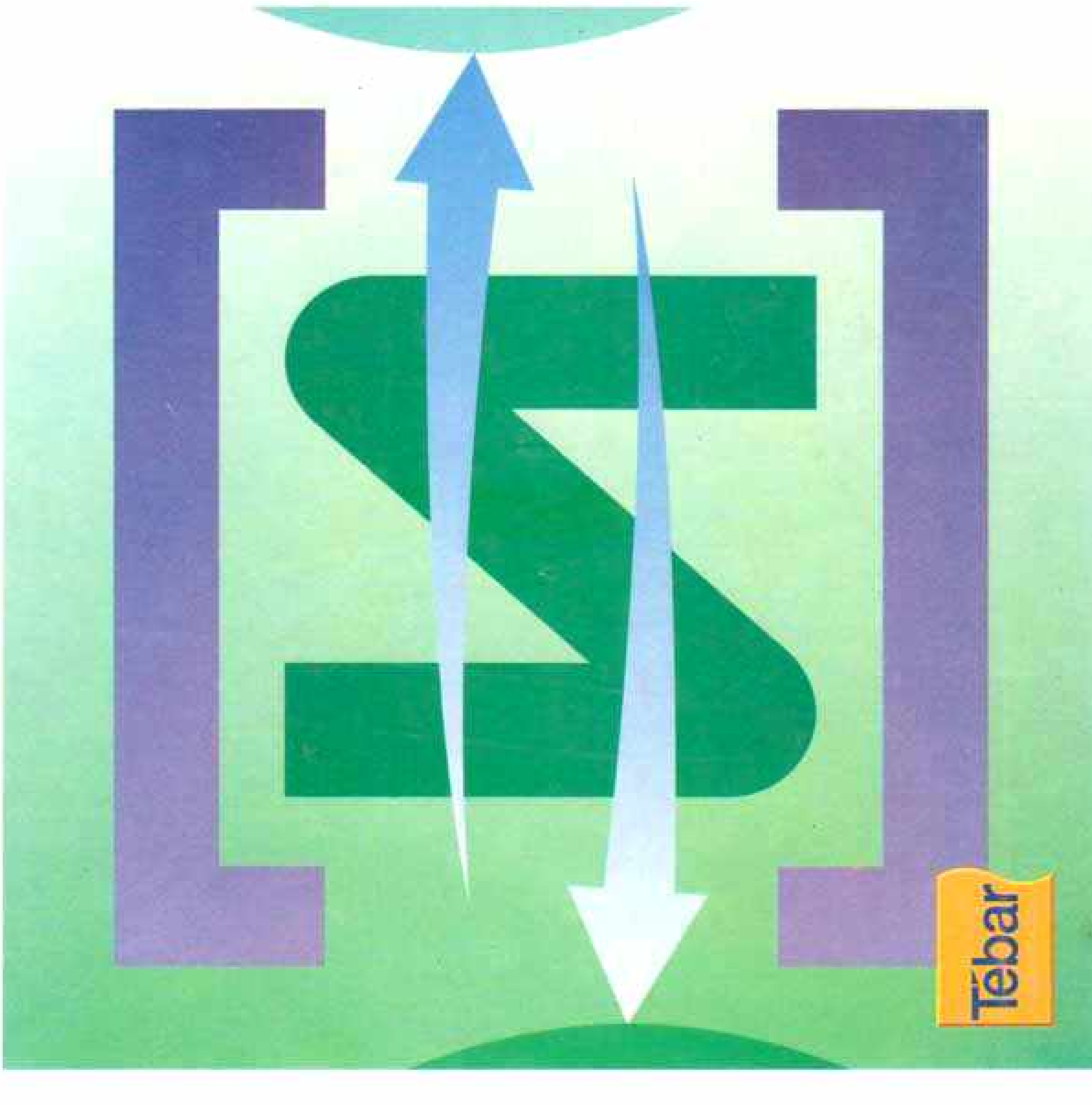
E. TÉBAR FLORES

EXÁMENES DE MATEMÁTICAS I DE SELECTIVIDAD

525 PROBLEMAS TOTALMENTE RESUELTOS



E. TEBAR FLORES

EXAMENES DE MATEMATICAS I DE SELECTIVIDAD

525 PROBLEMAS TOTALMENTE RESUELTOS

Tébar

Gaztambide, 61
Tel.: 91 550 02 60
Fax: 91 550 02 61
28015 Madrid
www.editorialtebar.com

Diseño de la portada: Fernando Coquillat

D.L.: 89-AB-1993
I.S.B.N.: 84-7360-131-9

Impreso en la **Imprenta TEBAR FLORES, S.L.**
Avda. de los Toreros, 7 - ALBACETE
Tel.: (967) 22 11 37

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro, dirigido a los estudiantes de COU y Selectividad, abarca plenamente el programa oficial de Matemáticas I de COU, aportando en un apéndice una serie de definiciones y fórmulas de combinatoria y trigonometría plana.

Cada capítulo se inicia con un denso resumen práctico de la teoría correspondiente, con numerosos ejercicios y problemas donde se aplican de manera inmediata los conceptos y fórmulas expuestos. Aconsejo a los estudiantes una lectura detenida de esta parte, con ello conseguirá tres objetivos: Entender sin esfuerzo los problemas que a continuación se resuelven, estar capacitado para contestar cualquier cuestión teórica que se le presente en el examen y conseguir una sólida base para afrontar sus estudios universitarios.

Una vez estudiada la parte teórica se resuelve con todo detalle una selección de problemas de Selectividad propuestos en los últimos años en las distintas universidades españolas. Si bien algunos son de fácil resolución, otros plantean grandes dificultades al estudiante de COU que no tiene experiencia en este tipo de problemas. Esta obra ayudará al estudiante a resolver cualquier problema que se le presente en el examen y lograr la nota que desea o necesita para estudiar la carrera deseada.

Mi agradecimiento a mi hermana Lorenza, sin cuya ayuda y colaboración no hubiera sido posible este libro.

E. Tébar Flores

CAPITULO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES METODO DE GAUSS

Una ecuación es **lineal** respecto de las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, si se puede expresar de la forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = k \qquad (1)$$

siendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ (coeficientes de las incógnitas) y k (término independiente o constante) elementos conocidos de un cuerpo **K**. En lo sucesivo consideraremos que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, cuerpo de los números reales.

$(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ es una solución de la ecuación (1) si se verifica que

$$a_1\ c_1 + a_2\ c_2 + \cdots + a_n\ c_n = b$$

Resolver una ecuación es obtener todas sus soluciones.

La ecuación $\qquad 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -11$

es lineal, siendo $(3, 1, -3)$ una solución, ya que $\qquad 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + 4(-3) = -11$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. Se llama así a un conjunto de ecuaciones lineales que deben ser verificadas simultáneamente.

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{array}\right| \ (2) \qquad \text{simbólicamente:} \qquad \left.\begin{array}{l} E_1 = k_1 \\ E_2 = k_2 \\ \dots\dots \\ E_m = k_m \end{array}\right|$$

es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ es una solución del sistema (2) si las m ecuaciones de (2) son verificadas al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, por $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 4x_2 = 18 \\ x_1 + 2x_2 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 \end{array}\right|$$

es $(2, -3)$, ya que

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot 2 - 4(-3) = 18 \\ 2 + 2(-3) = -4 \\ 5 \cdot 2 + 3(-3) = 1 \end{array}\right|$$

Resolver un sistema es obtener todas sus soluciones.

Un sistema de ecuaciones puede o no tener soluciones. Un sistema que no admite ninguna solución se llama sistema **incompatible.** Si tiene alguna solución se llama sistema **compatible.** Si la solución es única se llama **compatible determinado,** y si tiene varias soluciones **compatible indeterminado.** En resumen:

Sistema compatible (tiene solución) $\begin{cases} \textit{compatible determinado (una sola solución)} \\ \textit{compatible indeterminado (varias soluciones)} \end{cases}$

Sistema incompatible (no tiene solución)

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

tiene la solución única $x = 2$, $y = 3$, es, por tanto, compatible determinado.

El sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 3z &= 5 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

es compatible indeterminado, ya que a cada valor distinto de k en: $x = 1-k$, $y = 3-k$, $z = k$, corresponde una solución distinta del sistema.

El sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

es incompatible, no tiene solución (restando ambas ecuaciones nos da: $0 = -2$, absurdo).

Dos sistemas son **equivalentes** cuando ambos tienen las mismas soluciones.

Si una ecuación es combinación lineal de otras, es decir, si resulta de sumarlas miembro a miembro, previamente multiplicadas por números cualesquiera, se dice que es consecuencia de ellas.

En el sistema

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 \\ 3x - \;\; y &= 2 \\ 6x + 8y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

la tercera ecuación es consecuencia de las dos primeras, ya que es igual a la primera ecuación multiplicada por 3, más la segunda multiplicada por -2.

Si en un sistema de m ecuaciones hay una ecuación que es combinación lineal de otras, puede suprimirse y nos quedará un sistema de $(m-1)$ ecuaciones que es equivalente al anterior.

El sistema del último ejemplo, como la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 \\ 3x - \;\; y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Eliminar una incógnita entre varias ecuaciones es obtener una ecuación, consecuencia de las anteriores, y que no contiene dicha incógnita.

Si en el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + \;\; z &= 4 \\ 5x + 4y + 3z &= 6 \\ 4x - 6y - 9z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

sumamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por 3, más la segunda multiplicada por 2, obtendremos la ecuación

$$14x - 7y = 31$$

que es consecuencia de las ecuaciones del sistema y en la que se ha eliminado la z.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA: Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una ecuación por el resultado de sumarla miembro a miembro (previamente multiplicada por un número distinto de cero) con otra u otras ecuaciones multiplicadas por números cualesquiera, resulta un sistema equivalente al dado.

Si $\alpha_1 \neq 0$, son equivalentes los dos sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = k_1 \\ E_2 = k_2 \\ \dots\dots\dots \\ E_m = k_m \end{array}\right| \quad (3) \qquad \left.\begin{array}{r} \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_m E_m = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_m k_m \\ E_2 = k_2 \\ \dots\dots\dots \\ E_m = k_m \end{array}\right| \quad (4)$$

en los que la primera ecuación de (3) se ha sustituido por la ecuación

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_m E_m = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_m k_m$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números reales.

Si en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 8z = 1 \end{array}\right|$$

se sustituye la primera ecuación por el resultado de multiplicarla por 4 y sumarle la segunda multiplicada por -5, y la tercera multiplicada por 2 se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -y - 2z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 8z = 1 \end{array}\right|$$

que es equivalente al dado.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. METODO DE GAUSS. En el teorema anterior se funda el **método de Gauss**, o de reducción, para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Sea el sistema (2): Si $a_{11} \neq 0$, se deja la primera ecuación invariable, la segunda ecuación se sustituye por la ecuación que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera ecuación multiplicada por $-a_{21}$, la tercera ecuación se sustituye por la ecuación que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera multiplicada por $-a_{31}$, y así sucesivamente hasta sustituir la última ecuación por la que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera multiplicada por $-a_{m1}$. Obtendremos así el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2 \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = h_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \cdots + b_{mn}x_n = h_m \end{array}\right| \quad (5)$$

que es equivalente a (2) y del que se ha eliminado la incógnita x_1 en las ecuaciones 2ª, 3ª, . . . , mª.

En el sistema (5), si $b_{22} \neq 0$, se dejan invariables las dos primeras ecuaciones y se elimina, como anteriormente, la incógnita x_2 en cada una de las restantes ecuaciones. Se obtendrá un sistema equivalente al (2) de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = \; k_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n = \; h_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = \; j_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m3}x_3 + \cdots + c_{mn}x_n = \; j_m \end{array}\right| \quad (6)$$

Así se continua hasta obtener un sistema en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la ecuación anterior, y que será equivalente al sistema primitivo.

Este método permite pasar de todo sistema de ecuaciones lineales a otro sistema equivalente cuya solución se obtiene más facilmente. Se comienza resolviendo la última ecuación, el valor (o valores) obtenido se sustituye en la penúltima, se resuelve ésta y se continua de esta forma hasta llegar a la primera ecuación.

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 2z = 3 \end{array}\right|$$

Representando, respectivamente, las ecuaciones por (1), (2) y (3), y por $a(1) - b(2)$ la ecuación que resulta de multiplicar la ecuación (1) por a y sumarle la ecuación (2) multiplicada por $-b$:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 2z = 3 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = 2(2) - 3(1) \\ (3') = 2(3) - 5(1) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7y - 5z = -1 \\ -3y - z = -9 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = 7(3') + 3(2') \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7y - 5z = -1 \\ -22z = -66 \end{array}\right| \Rightarrow \quad z = \frac{-66}{-22} = 3 \quad 7y = -1 + 5z = 14;\; y = 2 \quad 2x = 3 + y - z = 2;\; x = 1$$

Los cálculos se simplifican operando de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = 2(2) - 3(1) \\ (3') = 2(3) - 5(1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3') = 7(3') + 3(2') \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema primitivo es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7x - 5z = -1 \\ -22z = -66 \end{array}\right| \Rightarrow \quad z = 3 \quad y = 2 \quad x = 1$$

Si al aplicar el método de Gauss resulta alguna ecuación absurda, de primer miembro nulo y el segundo miembro distinto de cero (de la forma $0 = k_i \neq 0$), el sistema es **incompatible**, (no tiene solución).

Es incompatible el sistema
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

pues
$$\begin{array}{ll} (1) & x + y = 3 \\ (2) & 2x + 2y = 5 \end{array}\Bigg\} \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & x + y = 3 \\ (2') = (2) - 2(1) & 0 = -1 \end{array}\Bigg\}$$

Si resulta alguna ecuación de la forma $0\,x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + x_n = 0$, la ecuación de (2) que ocupa el lugar de ésta es combinación lineal de otras, y se prescindirá de ella, ya que el sistema que queda es equivalente al primitivo.

Si al aplicar el método de Gauss no resulta ninguna ecuación absurda, el sistema es **compatible** (tiene solución). Después de eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos quedará un sistema de h ecuaciones (siendo $h \leqslant n$) con n incógnitas que es equivalente al dado.

$h = n \Rightarrow$ el sistema es **compatible determinado** (tiene una sola solución)

$h < n \Rightarrow$ el sistema es **compatible indeterminado** (tiene infinitas soluciones)

Sea el sistema final:

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}\,x_1 + c_{12}\,x_2 + \cdots + c_{1h}\,x_h + c_{1h+1}\,x_{h+1} + \cdots + c_{1n}\,x_n = p_1 \\ c_{22}\,x_2 + \cdots + c_{2h}\,x_h + c_{2h+1}\,x_{h+1} + \cdots + c_{2n}\,x_n = p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{hh}\,x_h + c_{hh+1}\,x_{h+1} + \cdots + c_{hn}\,x_n = p_h \end{array}\right| \quad (7)$$

en el que $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{hh}$ son distintos de cero.

Para resolver el sistema (7), si $h = n$, se halla el valor de x_n de la última ecuación, el valor obtenidos se introduce en la penúltima ecuación y se halla el valor de x_{n-1}, y así se continua en orden ascendente hasta obtener el valor de x_1.

Sea el sistema
$$\left.\begin{aligned} -x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y - 2z &= 5 \\ 3x + 8y - z &= 13 \\ x - 2y + 6z &= 6 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{array}{ll} (1) & -x + 2y + 3z = 3 \\ (2) & 2x + 3y - 2z = 5 \\ (3) & 3x + 8y - z = 13 \\ (4) & x - 2y + 6z = 6 \end{array}\Bigg| \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & -x + 2y + 3z = 3 \\ (2') = (2) + 2(1) & 7y + 4z = 11 \\ (3') = (3) + 3(1) & 14y + 8z = 22 \\ (4') = (4) + (1) & 9z = 9 \end{array}\Bigg| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & -x + 2y + 3z = 3 \\ (2') & 7y + 4z = 11 \\ (3'') = (3') - 2(2') & 0 + 0 = 0 \\ (4') & 9z = 9 \end{array}\Bigg| \Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y + 3z &= 3 \\ 7y + 4z &= 11 \\ 9z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

que es compatible determinado (tiene una sola solución).

De la última ecuación se obtiene $z = 1$, llevando este valor a la segunda: $7y + 4 \cdot 1 = 11 \Rightarrow y = 1$. Llevando los valores de z e y hallados a la primera ecuación: $-x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Si $h < n$, se dan valores arbitrarios a las $n - h$ incógnitas $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ y se obtienen las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_h$ en función de estos valores.

Sea el sistema
$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 8 \\ -x + 3y + 4z &= 5 \\ 2x + 5y + 2z &= 13 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2) & -x + 3y + 4z = 5 \\ (3) & 2x + 5y + 2z = 13 \end{array}\Bigg\} \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2') = 3(2) + (1) & 11y + 10z = 23 \\ (3') = (3) + 2(2) & 11y + 10z = 23 \end{array}\Bigg\} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2') & 11y + 10z = 23 \\ (3'') = (3') - (2') & 0 + 0 = 0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 8 \\ 11y + 10z &= 23 \end{aligned}\right\}$$

que es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Las soluciones se obtienen haciendo $z = k$, y escribiendo el sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 + 2k \\ 11y &= 23 - 10k \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{23}{11} - \frac{10}{11}k \qquad 3x = 8 + 2k - 2y = 8 + 2k - \frac{26}{11} + \frac{20}{11}k = \frac{62}{11} + \frac{42}{11}k \qquad x = \frac{62}{33} + \frac{42}{33}k$$

de donde resulta la solución general $\quad x = \dfrac{62}{33} + \dfrac{14}{11}k \;;\quad y = \dfrac{23}{11} - \dfrac{10}{11}k \;;\quad z = k$

A cada valor distinto de k corresponde una solución distinta.

SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS: Los sistema de ecuaciones lineales en que todos los términos independientes son nulos se llaman **sistemas homogéneos**:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Los sistemas homogéneos siempre tienen la solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, llamada solución trivial. Pueden o no tener otras soluciones distintas de la trivial.

A los sistema homogéneos se les puede aplicar el método de Gauss. Después de eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos quedará un sistema de h ecuaciones ($h \leqslant n$) con n incógnitas, equivalente al dado.

$h = n \Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial

$h < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si $h < n$, se dan valores arbitrarios a las $n-h$ incógnitas $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ y se obtienen las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_h$ en función de estos valores.

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+4z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ 3x+9y-6z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ll} (1) & -x+3y+4z=0 \\ (2) & 2x+3y-5z=0 \\ (3) & 3x+9y-6z=0 \\ (4) & x+y-z=0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & -x+3y+4z=0 \\ (2')=(2)+2(1) & +9y+3z=0 \\ (3')=(3)+3(1) & 18y+6z=0 \\ (4')=(4)+(1) & 4y+3z=0 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -x+3y+4z=0 \\ (2') & 9y+3z=0 \\ (3'')=(3')-2(2') & 0+0=0 \\ (4'')=9(4')-4(2') & 15z=0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+4z=0 \\ 9y+3z=0 \\ 15z=0 \end{array}\right\}$$

que sólo tiene la solución trivial.

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=0 \\ -x+5y-z=0 \\ x+8y+2z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x-2y+4z=0 \\ (2) & -x+5y-z=0 \\ (3) & x+8y+2z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & 3x-2y+4z=0 \\ (2')=3(2)+(1) & 13y+z=0 \\ (3')=(3)+(2) & 13y+z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x-2y+4z=0 \\ (2') & 13y+z=0 \\ (3'')=(3')-(2') & 0+0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=0 \\ 13y+z=0 \end{array}\right\}$$

que tiene infinitas soluciones.

Las soluciones se obtienen haciendo $z=k$, y escribiendo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=-4k \\ 13y=-k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{13}k \qquad 3x=2y-4k=-\frac{2}{13}k-4k=-\frac{54}{13}k \ ; \ x=-\frac{18}{13}k$$

de donde resulta la solución general: $\quad x=-\dfrac{18}{13}k \ ; \quad y=-\dfrac{1}{13}k \ ; \quad z=k$

A cada valor valor distinto de k corresponde una solución distinta.

PROBLEMAS

1.1 **Resolver, aplicando el método de Gauss, el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 3 \\ 2x - y - 4z &= 7 \\ 3x - 3y - 5z &= 8 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Extremadura)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 7 \\ 3 & -3 & -5 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 2\cdot(1) \\ (3') = (3) - 3\cdot(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - (2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 3 \\ 3y + 2z &= 1 \\ 2z &= -2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad z = -1 \quad 3y = 1 - 2z = 1 + 2 = 3\ ;\ y = 1 \quad x = 3 + 2y + 3z = 3 + 2 - 3 = 2$$

$$\boxed{x = 2\ ;\quad y = 1\ ;\quad z = -1}$$

1.2 **Resolver el siguiente sistema:**

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= -2 \\ x + y &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Madrid)

Con el fin de facilitar los cálculos escribiremos el sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} z + 2x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \\ 2z + 5x + 3y &= -2 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3') = (3) - 2\cdot(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3'') = (3') - (2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} z + 2x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \\ 4y &= -10 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad y = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad x = 2 - y = \frac{9}{2} \quad z = 3 - 2x + y = -\frac{17}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{9}{2}\ ;\quad y = -\frac{5}{2}\ ;\quad z = -\frac{17}{2}}$$

1.3 **Resolver los sistemas** $\left.\begin{aligned} x - 5y &= -1 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right|$ **y** $\left.\begin{aligned} -2x + 10y &= 2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right|$ **justificando por qué tienen la misma solución. Sin hacer ningún cálculo, explicar cuál sería la solución del siguiente sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x - 5y &= -1 \\ -2x + 10y &= 2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Valencia, 1991)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left.\begin{aligned} x - 5y &= -1 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 3(1) \end{array} \left.\begin{aligned} x - 5y &= -1 \\ 16y &= 8 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \left.\begin{aligned} -2x + 10y &= 2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} (3) \\ (4') = 2(4) + 3(3) \end{array} \left.\begin{aligned} -2x + 10y &= 2 \\ 32y &= 16 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{3}{2}$$

Los dos sistemas son equivalentes, la ecuación (3) del segundo sistema es igual a la ecuación (1) del sistema multiplicada por -2, y la segunda ecuación de ambos sistemas es la misma.

El sistema $\left.\begin{aligned} x - 5y &= -1 \\ -2x + 10y &= 2 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}\right|$ tiene la segunda ecuación que es igual a la primera multiplicada por -2, o sea que la segunda ecuación es consecuencia de la primera. El sistema que resulta al tachar la segunda ecuación es equivalente al dado. Al ser el tercer sistema equivalente al primero, las soluciones pedidas son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

1.4 · **Resolver los sistemas**

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 2x+y-z&=1\\ 3x+2y+z&=10 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=-1\\ 2x+y-z&=6\\ 3x+2y+z&=7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=-5\\ 2x+y-z&=-1\\ 3x+2y+z&=5 \end{aligned}\right\}$$

Como los coeficientes de las incógnitas son iguales en los tres sistemas, podemos disponer los cálculos así:

$$\begin{array}{l} (1)\\ (2)\\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -5\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 6 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 10 & 7 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1)\\ (2') = (2)-2(1)\\ (3') = (3)-3(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -5\\ 0 & 5 & -3 & 1 & 8 & 9\\ 0 & 8 & -2 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1)\\ (2')\\ (3'') = 5(3')-8(2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -5\\ 0 & 5 & -3 & 1 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 14 & 42 & -14 & 28 \end{array}\right) \Rightarrow$$

los sistemas dados son equivalentes a los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 5y-3z&=1\\ 14z&=42 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=3 \end{aligned} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=-1\\ 5y-3z&=8\\ 14z&=-14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=2\\ y&=1\\ z&=-1 \end{aligned} \quad ;$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y+\cdot z&=-5\\ 5x-3z&=9\\ 14z&=28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=-1\\ y&=3\\ z&=2 \end{aligned}$$

1.5 **Una refinería compra petróleo a dos países A y B. Comprando 500 barriles al país A y 15.500 al país B resulta un precio medio de 19,875 dólares. Comprando 1.000 barriles al país A y 1.000 al B el precio medio es de 18 dólares por barril. ¿Cuánto cuesta el barril de crudo de cada país?**

(Univ. de Santiago)

Sean x ; y los precios del barril de los paises A y B respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} 500x + 15\,500y &= (500 + 15\,500)\cdot 19{,}875\\ 1\,000x + 1\,000y &= (1\,000 + 1\,000)\cdot 18 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1)\\ &(2) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & 500x + 15\,500\,y = 318000 \\ (2): & 1\,000x + 1\,000\,y = 36000\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}(1') = -\frac{1}{500}(1) \\ (2') = \frac{1}{1000}(2)\end{array} \quad \left.\begin{array}{l}x + 31y = 636 \\ x + \quad y = 36\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1') & x + 31y = 636 \\ (2'') = (1') - (2') & 30y = 600\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = 636 - 3y = 16 \\ y = \frac{600}{30} = 20\end{array}$$

En el país A cuesta el barril 16 dólares y en B 20 dólares.

1.6 **Hallar un número de 3 cifras sabiendo que suman 9; que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos.**

(Univ. de Salamanca)

Sea $\overline{cba}$ el número pedido:

$a + b + c = 9 \qquad (1)$

$\overline{cba} - \overline{abc} = 198 \Rightarrow (a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 198\ ; -99a + 99c = 198\ ;$

$-a + c = 2 \qquad (2)$

$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow a - 2b + c = 0 \qquad (3)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) ; (2) y (3) :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2) & -a \quad\;\; + c = 2 \\ (3) & a - 2b + c = 0\end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2') = (2) + (1) & b + 2c = 11 \\ (3') = (3) + (2) & -2b + 2c = 2\end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2') & b + 2c = 11 \\ (3'') = (3') + 2(2') & 6c = 24\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 9 - b - c = 2 \\ b = 11 - 2c = 3 \\ c = 4\end{array}$$

El número pedido es el 432.

1.7 **Un estudiante observó durante los d días de sus vacaciones que:**

a) Llovió siete veces, por la mañana o por la tarde.
b) Llovió una sola vez cada mañana o tarde lluviosa.
c) Si llovió por la tarde no llovió por la mañana de aquel día.
d) Hubo cinco tardes claras y seis mañanas claras.
Averiguar el número de días de vacaciones.

(Univ. de Madrid)

Sean m el número de mañanas lluviosas, y t el número de tardes lluviosas.

mañanas lluviosas + mañanas claras = días de vacaciones:

$$m + 6 = d \qquad (1)$$

tarde lluviosas + tarde claras = días de vacaciones:

$$t + 5 = d \qquad (2)$$

mañanas lluviosas + tarde lluviosas = 7

$$m + t = 7 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3) & m + t = 7 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3') = (3) - (1) & d + t = 13 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3'') = (3') + (2) & 2t = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \quad t = 4 \quad d = t + 5 = 9 \quad m = -6 + d = 3$$

Hubo 9 días de vacaciones.

1.8 **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda una partida, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?**

(Univ. de Castilla – La Mancha)

Puesto que la cantidad total de dinero que tienen entre los tres jugadores es igual al principio que al final, entre los tres jugadores reunen $24 \times 3 = 72$ pesetas.

Sean x las pesetas que tenía el jugador A antes de empezar el juego, y las que tenía el jugador B y z las que tenía el jugador C.

Si A pierde la primera partida, B pierde la segunda y C la tercera:

	Dinero de A	Dinero de B	Dinero de C
Al final de la 1.ª partida	$x - y - z$	$2y$	$2z$
Al final de la 2.ª partida	$2(x - y - x)$	$2y - (x - y - z) - 2z =$ $3y - x - z$	$4z$
Al final de la 3.ª partida	$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z) =$ $7z - x - y$

de donde resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 72 \\ 4(x - y - z) = 24 \\ 2(-x + 3y - z) = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 72 \\ x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (1) + (2): & 2x = 78 \; ; \\ (1) + (3): & 4y = 84 \; ; \\ (1) + (4): & 8z = 96 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x = 39 \\ \hline y = 21 \\ \hline z = 12 \\ \hline \end{array}$$

1.9 **El tío Evaristo tiene 10 litros de mezcla de agua y vino. Al probarla observa que es demasiado ligera; por lo que decide añadir una cierta cantidad de vino; y entonces la cantidad de agua es el 30% del total. Como sigue siendo ligera; añade de nuevo la misma cantidad de vino que antes; y entonces la cantidad de agua es el 20% del total. ¿Cuántos litros de vino se añaden en cada ocasión y cuántos hay de agua?**

(Univ. del País Vasco)

Composición de la mezcla en litros:

	Agua	Vino	Total
Composición primitiva:	x	y	10
" al añadir z litros de vino:	x	y + z	10 + z
" al añadir de nuevo z l. de vino:	x	y + 2z	10 + 2z

Si en la segunda composición la cantidad de agua es el 30 % del total:

$$\frac{x}{10+z} = \frac{30}{100} \Rightarrow 10x - 3z = 30 \qquad (1)$$

Si en la tercera composición la cantidad de agua es el 20% del total:

$$\frac{x}{10+2z} = \frac{20}{100} \Rightarrow 10x - 4z = 20 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{array}{ll} (1) & 10x - 3z = 30 \\ (2) & 10x - 4z = 20 \end{array} \Bigg| \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & 10x - 3z = 30 \\ (2') = (1) - (2) & z = 10 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ z = 10 \end{array}$$

se añaden 10 litros de vino en cada ocasión y hay 6 litros de agua en cada una de las composiciones.

1.10 **La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años.**

¿Qué edad tenía el padre en el momento del nacimiento de cada uno de sus hijos?

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Sea x la edad actual del padre, y la del hijo mayor y z la del menor:

— la edad del padre es doble que la suma de las edades de los dos hijos:

$$x = 2(y + z) \qquad (1)$$

— hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos:

$$x - (y - z) = 3\{[y - (y - z)] + [z - (y - z)]\} \qquad (2)$$

— cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años:

$$[x + (y + z)] + [y + (y + z)] + [z + (y + z)] = 150 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman, después de reducirlas, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2) & x + 2y - 8z = 0 \\ (3) & x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2') = (2) - (1) & 4y - 6z = 0 \\ (3') = (3) - (2) & 2y + 12z = 150 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2') & 4y - 6z = 0 \\ (3'') = 2(3') - (2') & 30z = 300 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{r} x = 50 \\ y = 15 \\ z = 10 \end{array}$$

La edad del padre cuando nació el primer hijo era $50 - 15 = 35$ y cuando nació el segundo hijo era $50 - 10 = 40$.

1.11 **Tres gráficas representan las funciones $y = ax + 2$, $y = 6x - b$, $y = -x - 1$, respectivamente. Determina, si es posible, los valores de a y b para que:**

1) las tres gráficas concurran en un punto;

2) las tres gráficas sean paralelas;

3) las tres gráficas se corten dos a dos.

(Univ. de Cantabria)

1). Las gráficas de las funciones dadas, por ser lineales en x e y, representan tres rectas.

Las tres rectas concurrirán en un punto si el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -ax + y = 2 \\ -6x + y = -b \\ x + y = -1 \end{array}\right|$$

es compatible determinado.

Aplicando el método de Gauss al sistema escrito de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y + x = -1 \\ (2) & y - 6x = -b \\ (3) & y - ax = 2 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & y + x = -1 \\ (2') = (2) - (1) & -7x = 1 - b \\ (3') = (3) - (1) & -(1+a)x = 3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & y+x=-1 \\ (2') & -7x=1-b \\ (3'')=-7(3')+(1+a)(2') & 0=a-b-ab-20 \end{array}\Bigg|$$

el sistema será compatible determinado si $\underline{a-b-ab-20=0}$.

2) Las tres gráficas serán paralelas si los coeficientes angulares de las tres rectas son iguales:

$$a=6=-1$$

se llega a una contradicción, lo que nos dice que para ningún valor de a y b las tres rectas serán paralelas.

3) Si $a \notin \{-1, 6\}$, las tres rectas se cortarán dos a dos.

Si $a \in \{-1, 6\}$, la primera recta será paralela a alguna de las otras dos. Si $a=6$ y $b=-2$, las dos primeras rectas son coincidentes.

1.12 **Clasificar el siguiente sistema y, si fuese posible, resolverlo:**

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+y+2z=5 \end{array}\right|.$$

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2')=(2)-(1) \\ (3')=(3)-2(1) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'')=(3')-(2') \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema dado es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=3 \\ 3y-4z=-1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

que está formado por dos ecuaciones, linealmente independientes, con tres incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

De (b): $\qquad 3y=-1+4z \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+\frac{4z}{3}$

llevando este valor a (a): $\quad x=3+y-3z=3-\frac{1}{3}+\frac{4z}{3}-3z=\frac{8}{3}-\frac{5z}{3}$

haciendo $z=3k$:

$$\boxed{x=\frac{8}{3}-5k\ ; \quad y=-\frac{1}{3}+4k\ ; \quad z=3k}$$

1.13 **Calcular el valor de m para que el siguiente sistema sea compatible:**

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - 3y &= 1 \\ 2x + y &= m \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - (1) \\ (3') = (3) - 2(1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & m-6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = 5(3') - 3(2') \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5m-24 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -5y &= -2 \\ 0 &= 5m-24 \end{aligned}\right\}$$

La última igualdad será una incongruencia si $5m - 24$ es distinto de 0, luego el sistema serácom patible si

$$5m - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{24}{5}}$$

1.14 **Hallar la relación que deben cumplir a, b y c para que el sistema**

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= a \\ -2x + 5y &= b \\ 4x + 9y &= c \end{aligned}\right\}$$

tenga una única solución.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ -2 & 5 & b \\ 4 & 9 & c \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = 3(2) + 2(1) \\ (3') = 3(3) - 4(1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 0 & 19 & 3b + 2a \\ 0 & 19 & 3c - 4a \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - (2') \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 0 & 11 & 3b-2a \\ 0 & 0 & 6a+3b-3c \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema tenrá una sola solución si

$$6a + 3b - 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 2a + b}$$

1.15 **Discutir y, en su caso, resolver el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= 2 \\ y + 2z &= a \end{aligned}\right\}$$

(Univ. de Valladolid)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&2\\0&1&2&a\end{array}\right)\longrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3')=(3)-(2)\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&a-2\end{array}\right)\longrightarrow$$

el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=0\\y+z&=2\\z&=a-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad z=a-2\qquad y=2-z=2-a+2=4-a\qquad x=-y-z=-4+a-a+2=-2$$

$$\boxed{x=-2\ ;\quad y=4-a\ ;\quad z=a-2}$$

Cualquiera que sea el valor del parámetro a, existe una solución del sistema, o sea que éste es compatible determinado.

1.16 **Determinar a para que el sistema**

$$\left.\begin{aligned}4x\qquad-4z&=0\\x-y+az&=0\\-x-ay-\ z&=0\end{aligned}\right\}$$

tenga solución distinta de la trivial.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}4&0&-4\\1&-1&a\\-1&-a&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2')=4(2)-(1)\\(3')=(3)+(2)\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&-4&4a+4\\0&-a-1&-1+a\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2')\\(3')=-4(3')+(a+1)2'\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&-4&4a+4\\0&0&4a^2+4a+8\end{pmatrix}$$

Si $4a^2+4a+8\neq 0$, el sistema sólo tiene la solución trivial: $x=y=z=0$, y si $4a^2+4a+8=0$, el sistema tiene infinitas soluciones:

$$4a^2+4a+8=0\ \Rightarrow\ a=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot4\cdot8}}{2\cdot4}=\frac{-4\pm\sqrt{-112}}{8}$$

no hay ningún valor real de a para el que el sistema tiene solución distinta de la trivial.

1.17 **Discutir y resolver, según los valores de a, el sistema:**

$$\left.\begin{aligned}x+2y+z&=0\\x+(a+2)y+2z&=0\\x+(2-a)y+(a-2)z&=0\end{aligned}\right\}$$

(Univ. de Madrid)

$$\begin{array}{ll} (1) & x + 2y + z = 0 \\ (2) & x + (a+2)y + 2z = 0 \\ (3) & x + (2-a)y + (a-2)z = 0 \end{array} \Bigg\} \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & x + 2y + z = 0 \\ (2') = (2)-(1) & ay + z = 0 \\ (3') = (3)-(1) & -ay + (a-3)z = 0 \end{array} \Bigg\} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & x + 2y + z = 0 \\ (2') & ay + z = 0 \\ (3'') = (3') + (2') & (a-2)z = 0 \end{array} \Bigg\}$$

Si $a \neq 2$, las tres ecuaciones son linealmente independientes, sólo existe la solución trivial.

Si $a = 2$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \Big\}$$

como el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, tiene infinitas soluciones.

De la última ecuación: $z = -2y$

llevando este valor a la primera ecuación: $x = -2y + 2y = 0$

haciendo $y = k$, tenemos la solución general:

$$\boxed{x = 0 \quad ; \quad y = k \quad ; \quad z = -2k}$$

1.18 **Se considera el sistema**

$$\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = m \\ 3x + 2y - mz = 4 \end{array} \Bigg\}$$

a) Discutir el sistema según los valores m.

b) Resolver el sistema para $m = 1$.

(Univ. de Madrid, 1991)

a)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & m \\ 3 & 2 & -m & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \\ (3') = (3) - 3(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & 5 & -m-3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - 5(2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & 0 & -m+2 & 11-5m \end{array}\right)$$

Si $\underline{-m + 2 \neq 0,\ m \neq 2}$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una sola solución)

Si $\underline{m = 2}$, la última igualdad al aplicar Gauss será: $0 = 1$, absurdo, el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

b) Para $m = 1$, el sistema resultante al aplicar Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 6 \end{array}\right| \Rightarrow \quad z = 6 \quad y = -1 + z = -1 + 6 = 5 \quad x = 1 + y - z = 1 + 5 - 6 = 0$$

1.19 Discutir y resolver según los valores de a el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array}\right\}$$

(Univ. de Santiago, 1991)

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}(1)\\(2') = a(2)-(1)\\(3') = (3)-(2)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'') = (1+a)(3')+(2')\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^3+a^2-a-1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)(a-1) & a-1 & (a+1)(a-1) \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) & (a-1)(a+1)^2 \end{array}\right)$$

Si $a \notin \{1, -2\}$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una solución)

El sistema es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ (a+1)(a-1)\,y + (a-1)z = (a+1)(a-1) \\ (a+2)(a-1)z = (a-1)(a+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z = \frac{(a-1)(a+1)^2}{(a+2)(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}\ ;$$

$$y = \frac{(a+1)(a-1) - (a-1)\dfrac{(a+1)^2}{a+2}}{(a+1)(a-1)} = 1 - \frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{a+2}\ ;$$

$$x = \frac{1 - \dfrac{1}{a+2} - \dfrac{(a+1)^2}{a+2}}{a} = \frac{a+2-1-a^2-2a-1}{a(a+2)} = \frac{a(-a-1)}{a(a+2)} = \frac{-a-1}{a+2}$$

Si $a = 1$, por Gauss hubiésemos llegado al cuadro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones)

El sistema dado es equivalente al formado por la ecuación

$$x + y + z = 1 \qquad x = 1 - y - z$$

haciendo $y = k$, $z = h$, tenemos la solución general

$$\boxed{x = 1 - k - h \quad ; \quad y = k \quad ; \quad z = h}$$

Si $\underline{a = -2}$, por Gauss hubiéramos llegado al cuadro

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

la última línea equivale a decir que $0 = -3$, absurdo, luego el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

1.20 **Determinar, si existen, los valores del parámetro a para que el sistema**

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 4x + y + az &= 4 \\ -6x + 4y - 6z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

sea compatible pero indeterminado.

(Univ. de Cantabria)

El sistema será compatible indeterminado si al aplicar Gauss nos resulta al menos una fila de ceros, ya que al tener el sistema tres incógnitas el número máximo de ecuaciones linealmente independientes tiene que ser dos:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & a & 4 \\ -6 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 4(1) \\ (3') = (3) + 6(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & a-8 & -8 \\ 0 & 22 & 6 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') + 2(2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & a-8 & -8 \\ 0 & 0 & 2a-10 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema será compatible indeterminado si $2a - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 5}$

CAPITULO 2

MATRICES

MATRICES.

Se llama **matriz real de dimensión $m \times n$ o de orden $m \times n$**, al conjunto de $m \cdot n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los $m \cdot n$ números reales a_{ij} se llaman *términos* o *elementos* de la matriz. Los números naturales i y j designan, respectivamente, la fila y la columna a las que pertenece el elemento a_{ij}.

Las matrices se suelen representar por letras mayúsculas, A, B, ..., o $A_{m \times n}$, $B_{p \times q}$, ... cuando sea conveniente indicar su dimensión, o bien por (a_{ij}), (b_{ij}), ... o $(a_{ij})_{m \times n}$, $(b_{ij})_{p \times q}$ ...

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que una linea (fila o columna) es *combinación lineal* de otras líneas paralelas a ella $l_1, l_2, \dots$ cuando resulta de sumar éstas, multiplicadas respectivamente por números $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ cualesquiera.

En la matriz anterior, $A_{3\times 2}$, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, ya que es igual a la primera más la segunda multiplicada por 2.

Dos matrices son *equidimensionales* si tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

El conjunto de matrices equidimensionales, de m filas y n columnas se simboliza por $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son *iguales* si son equidimensionales e iguales todos los elementos correspondientes.

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad y \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Las matrices
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
serán iguales si y solo si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$ y $f = 6$.

Matriz nula es la que tiene todos sus elementos iguales a 0. Se simboliza por $O_{m\times n}$ o por O cuando no haya duda de su dimensión.

Son matrices nulas:

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad O_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz fila es la que tiene una sola fila: $A_{1\times n}$, y **matriz columna** es la que tiene una sola columna $B_{m\times 1}$.

$$A_{1n} = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n} \end{bmatrix} \qquad B_{m1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz opuesta de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $B = (-a_{ij})$. Se escribe: $B = -A$.

La matriz opuesta de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \\ -e & -f \end{bmatrix}$

Matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Las matrices cuadradas de n filas y n columnas, o sea de dimensión $n\times n$, diremos simplemente que son de orden n.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii}. La otra diagonal se llama *secundaria* (la formada por los elementos a_{ij} tales que $i + j = n + 1$)

Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$\mathrm{Tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

En una matriz cuadrada se llama *conjugado* del elemento a_{ij} al elemento a_{ji}

Matriz diagonal es la matriz cuadrada cuyos términos no situados en la diagonal principal son nulos.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar es la matriz diagonal que tiene iguales todos los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \qquad (k \neq 0)$$

Matriz unidad es la matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

La matriz unidad de orden n se simboliza por I_n, o por I cuando no hay duda sobre su orden.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal.

Es triangular superior si son nulos los elementos situados por debajo de la diagonal principal, y triangular inferior si son nulos los elementos situados por encima de la diagonal principal.

La matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es triangular superior, y $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

Matriz simétrica es la matriz cuadrada que tiene iguales sus elementos conjugados, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y todo j.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Matriz antisimétrica es la matriz cuadrada que verifica la propiedad: $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo valor de i y todo valor de j. Los elementos de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

SUMA DE MATRICES.

La **suma o adición** de dos matrices A y B del mismo orden, $m \times n$, es otra matriz C, de orden $m \times n$, cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de A y B que ocupan lugares homólogos.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \dots a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \dots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dos matrices se podrán sumar si y solo si son equidimensionales.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+2 & -1+3 \\ -2+1 & 4+2 & 2-4 \\ 5+2 & 6-4 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices:

1º La suma de matrices es ley de composición interna.

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_{m \times n})^2: \qquad A + B = C \in \mathscr{M}_{m \times n}$$

2º Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall (A, B, C) \in (\mathscr{M}_{m \times n})^3$

3º Existe el elemento neutro. Este es la matriz nula de orden $m \times n$, que simbolizaremos por **O**.

4º Existe el elemento simétrico o **matriz opuesta.**

$$\forall A \in \mathscr{M}_{m \times n} \quad \exists -A \in \mathscr{M}_{m \times n} \;/\; A + (-A) = \mathbf{O}$$

5º Propiedad conmutativa: $A + B = B + A \quad \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{m\times n})^2$

Por cumplir las cinco propiedades anteriores, el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$, tiene estructura de grupo abeliano respecto de la suma.

PRODUCTO DE MATRICES.

Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y la matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times p$, se llama producto de A por B a la matriz $C = (c_{ij})$ de dimensión $m \times p$, en donde el elemento genérico c_{ij} es igual a la suma de los productos siguientes: primer elemento de la fila i de A por el primero de la columna j de B, el segundo elemento de la fila i de A por el segundo de la columna j de B, . . . , el n-ésimo de la fila i de A por el n-ésimo de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{kp} \end{bmatrix}$$

Sólo será posible el producto de A por B si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 4b \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ 4a+5d+6g & 4b+5e+6h & 4c+5f+6i \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

— Propiedad asociativa:

$$A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} \cdot C_{p\times q}) = (A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}) \cdot C_{p\times q}$$

— Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$A_{m\times n} \cdot (B_{n\times p} + C_{n\times p}) = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} + A_{m\times n} \cdot C_{n\times p}$$

$$(A_{m\times n} + B_{m\times n}) \cdot C_{n\times p} = A_{m\times n} \cdot C_{n\times p} + B_{m\times n} \cdot C_{n\times p}$$

— En general, no se verifica la propiedad conmutativa.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 3 \\ 24 & -16 & 7 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$$

Hay casos en que existe $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ y no existe $B_{n \times p} \cdot A_{m \times n}$, si $p \neq m$.

En los casos especiales en que $A \cdot B = B \cdot A$, se dice que las matrices A y B son *permutables.*

Solamente si A y B son permutables se podrá decir que $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$, pues en general $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

— Toda matriz escalar de orden n conmuta con toda matriz cuadrada de orden n.

En particular, la matriz unidad I_n conmuta con cualqier matriz cuadrada de orden n, verificándose:

$$I_n \cdot A_n = A_n \cdot I_n = A_n$$

El elemento neutro, respecto de producto, de las matrices cuadradas de orden n es la matriz unidad I_n.

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NUMERO.

El producto de la matriz $A = (a_{ij})$, de orden $m \times n$, por el número real λ es la matriz $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$, de orden $m \times n$, cuyos elementos se obtienen multiplicando todos los elementos de A por λ.

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \ldots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \ldots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} \ldots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 15 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

El producto de una matriz por un número cumple las siguientes propiedades:

1º $\quad \lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2º $\quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

3º $\quad \lambda\,(\mu\, A) = (\lambda \mu)\, A$

4º $\quad 1 \cdot A = A$

Por cumplir estas cuatro propiedades y las cinco anteriores de la suma, el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ de matrices de orden $m \times n$, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

MATRIZ TRANSPUESTA.

Matriz transpuesta de la matriz $A_{m \times n}$ es la matriz $B_{n \times m}$ que resulta de cambiar ordenadamente sus filas por sus columnas.

La matriz transpuesta de A se simboliza por A^t o por A'.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Si A es simétrica: $A^t = A$
- Si A es antisimétrica: $(-A)^t = A$, o bien $-A = A^t$

MATRIZ INVERSA.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A tiene inversa si existe una matriz B, cuadrada de orden n, tal que $A \cdot B = I_n$. Se dice que B es la **matriz inversa** de A.

La matriz inversa de A, cuando existe, se simboliza por A^{-1}, verificándose:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

La matriz inversa de A, cuando existe, es única.

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es posible pasar, por transformaciones elementales sobre las filas, del cuadro

$$(A \mid I)$$

al cuadro

$$(I \mid A^{-1})$$

Una *transformación elemental* sobre las filas de una matriz es cualquiera de las operaciones siguientes:

– Multiplicar, o dividir, los elementos de una fila por un número.

– Cambiar entre sí dos filas.

– Sumar a los elementos de una fila, multiplicados o no por un número, los correspondientes elementos de otra fila multiplicados por otro número.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$: $\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$

$$\begin{array}{c} (1') = (1) - (2') \\ (2') \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$: $\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 3(1) \\ (3') = (3) + 4(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = \frac{1}{2}(3') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2'') = (2') - 5(3'') \\ (3'') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Si en alguno de los pasos del cálculo de la matriz inversa de A, en la parte izquierda de la recta vertical aparece una fila de ceros o dos filas proporcionales, la matriz A no tiene inversa.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) + 2(1) \\ (3') = (3) - 3(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{A no tiene inversa.}$$

El cálculo de la matriz inversa de esta forma se conoce por *cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss.*

Las ecuaciones matriciales de la forma

$$AX + B = C \qquad (1)$$

cuando A es una matriz cuadrada e inversible se resuelven del siguiente modo:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B$$

multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow IX = \boxed{X = A^{-1}(C - B)}$$

Encontrar una matriz X que satisfaga la ecuación $A \cdot X + B = C$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Santiago)

Veamos si A tiene inversa:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2'') = \frac{1}{3}(2') \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \text{A tiene inversa, siendo} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Comprobado que A tiene inversa, podemos operar de la siguiente forma:

$$AX + B = C \quad \Rightarrow \quad AX = C - B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B) \quad \Rightarrow$$

$$IX = X = A^{-1}(C - B)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

NOTA: En el capítulo siguiente, después de conocer la teoría de determinantes, se ampliará la teoría de la matriz inversa.

PROBLEMAS

2.1 Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ siendo A y B las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2(-2) + (-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3-4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3(-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1(-1) \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 & -2(-1) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2 Obtener los valores de x, y, z, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Valencia)

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y+z \\ 2y+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \\ -x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x+y+z=1 \\ (2) & 2x+2y+z=0 \\ (3) & -x+z=0 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & x+y+z=1 \\ (2')=(3)+(1) & y+2z=1 \\ (3')=(2)-2(1) & -z=-2 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x=1-y-z=1+3-2=2 \\ y=1-2z=-3 \\ z=2 \end{array}$$

2.3 Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{array}\right\}$

sabiendo que X e Y son matrices de dimensión 3×4, y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 2X + Y = A \\ (2) & 4X - 3Y = B \end{array}\Bigg\} \rightarrow \begin{array}{ll} (1) & 2X + Y = A \\ (2') = (2) - 2(1) & -5Y = B - 2A \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{5}(2A - B)}$$

$$2X = A - Y = A - \frac{1}{5}(2A - B) = \frac{1}{5}(3A + B) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \frac{1}{10}(3A + B)}$$

$$X = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} -3 & 24 & 21 \\ -9 & 18 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \\ -20 & 30 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} -2 & 16 & 14 \\ -6 & 12 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 & 20 & 35 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcular A^4.

(Univ. de Madrid)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5\cdot 5 + (-4)2 + 2(-4) & 5(-4) + (-4)(-1) + 2\cdot 4 & 5\cdot 2 + (-4)\cdot 1 + 2(-1) \\ 2\cdot 5 + (-1)2 + 1(-4) & 2(-4) + (-1)(-1) + 1\cdot 4 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1(-1) \\ -4\cdot 5 + 4\cdot 2 + (-1)(-4) & -4(-4) + 4(-1) + (-1)4 & -4\cdot 2 + 4\cdot 1 + (-1)(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2A - I = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

está comprobado que $A^2 = 2A - I$.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A-I)(2A-I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A-I) - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{bmatrix}$$

2.5 **Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ encontrar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que $AX = O$.**

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ la matriz pedida.

$$AX = O \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x-3y & 3y-3z \\ 2x-2y & 2y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 3y \qquad = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y \qquad = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{array}\right|$$

como las ecuaciones tercera y cuarta son, respectivamente, iguales a la primera y segunda multiplicadas por $2/3$; el sistema que resulta de tachar dichas ecuaciones es equivalente al anterior:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 3y \qquad = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = y \\ z = y \end{array} \Rightarrow x = y = z = k \Rightarrow X = \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix}$$

2.6 **Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se pide:**

1) Calcular la matriz $(A-I)^2$.
2) Haciendo uso del apartado anterior hallar A^4.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2+1 & 2-4+2 & -1+2-1 \\ -1+2-1 & -2+4-2 & 1-2+1 \\ -1+2-1 & -2+4-2 & 1-2+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A^2 conmuta con I (en la multiplicación):

$$A^4 - I^2 = (A^2+I)(A^2-I) = (A^2+I)\cdot O = O \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^4 = I^2 = I}$$

2.7 **Si P y Q son dos matrices cuadradas de orden n, ¿es cierta, en general, la igualdad**

$$P^2 + 2PQ + Q^2 = (P+Q)^2$$

(Univ. de León)

El producto de matrices cuadradas verifica la propiedad distributiva respecto de la suma, luego:

$$(P+Q)^2 = (P+Q)(P+Q) = P^2 + PQ + QP + Q^2$$

si PQ no es igual a QP: $\quad P^2 + 2PQ + Q^2 \neq (P+Q)^2$.

La igualdad del enunciado sólo se verificará si P y Q, además de ser cuadradas, conmutan respecto del producto.

2.8 **Probar que** $A^n = 2^{n-1}A$, **siendo** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Haremos la demostración por el método de inducción:

para $n=1$: $\quad A^1 = 2^{1-1}\cdot A = A$

" $n=2$: $\quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^{2-1}\cdot A \quad \Rightarrow$

la fórmula se verifica para $n=1$ y $n=2$, suponiendo que $A^h = 2^{h-1}A$:

$$A^{h+1} = A^h\cdot A = (2^{h-1}A)A = 2^{h-1}\cdot A^2 = 2^{h-1}\cdot 2A = 2^h\,A = 2^{(h+1)-1}A \quad \Rightarrow$$ la fórmula es cierta también para $n = h+1$. Está demostrado que $A^n = 2^{n-1}A$.

2.9 **Sea la matriz** $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular A^{100}.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

viendo estos resultados podemos considerar que $A^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y de aquí $$A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ h+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tiene la misma forma que A^n.

Está desmostrado por inducción que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix}$; luego: $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.10 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hallar A^n, para $n \in N$.

(Univ. de Cantabria)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la fórmula $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se cumple para $n = 1, 2$ y 3; suponiendo que también se cumple para $n = h$:

$$A^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

también se cumple para $n = h+1$.

Está demostrado, por el método de inducción que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.11 Hallar la matriz B^n, siendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Málaga)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot B$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = (3B) \cdot B = 3B^2 = 3(3B) = 3^2 B \ ; \quad B^4 = B^3 \cdot B = (3^2 B) \cdot B = 3^2 \cdot B^2 = 3^2 (3B) = 3^3 \cdot B$$

considerando estos resultados, podemos hacer la hipótesis de que $B^n = 3^{n-1} \cdot B$ (1)

de donde: $B^{n+1} = B^n \cdot B = (3^{n-1} B) \cdot B = 3^{n-1} \cdot B^2 = 3^{n-1} (3B) = 3^n \cdot B$

Está demostrado, por el método de inducción, que la fórmula (1) es cierta, luego

$$B^n = 3^{n-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.12 Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

calcular A^2, A^3 y A^{428}.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-15+3 & 20-20+4 & -4+5+0 \\ -12+12-3 & -15+16-4 & 3-4+0 \\ -12+12+0 & -15+16+0 & 3-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-15+0 & 16-15-1 & 4-5+1 \\ -12+12+0 & -12+12+1 & -3+4-1 \\ -12+12+0 & -12+12+0 & -3+4+0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad ; \qquad 428 = 142 \times 3 + 2 \Rightarrow A^{428} = A^{142 \times 3 + 2} = A^{142 \times 3} \cdot A^2 =$$

$$= (A^3)^{142} \cdot A^2 = I^{142} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.13 Comprobar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ verifica la relación $A^2 + I = O$ donde:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener una matriz B, distinta de ± A, que también verifique la relación $B^2 + I = O$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; $\quad B^2 + I = O \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc + 1 & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + bc + 1 = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ d^2 + bc + 1 = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

De (2): $b(a+d) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} b = 0 \Rightarrow \text{llevando este valor a (1): } a^2 + 1 = 0 \;;\; a^2 = -1, \text{ imposible luego } b \neq 0 \\ \text{ó} \\ a + d = 0 \Rightarrow d = -a \quad (5) \end{array} \right.$

Con el mismo razonamiento, de (3) y (4) se obtiene que $c \neq 0$.

De (1): $bc = -a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{-a^2-1}{b}$; a cada par de valores de a y b obtendremos valor de c, por ejemplo, para $a = 1$ y $b = 1$: $c = -2$, y de (5) $d = -1$, resultando la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.14 Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5; 2 y 2,5 centímetros con los precios respectivos siguientes:

Clavos A:	0,20	0,30	0,40	0,50	pts.
Clavos Q:	0,30	0,45	0,60	0,75	pts.
Clavos H:	0,40	0,60	0,80	1	pts.

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud:	100 A	50 Q	700 H
De 1,5 cm de longitud:	200 A	20 Q	600 H

De 2 cm de longitud:	500 A	30 Q	400 H
De 2,5 cm de longitud:	300 A	10 Q	800 H

Se pide:

a) **Resumir la información anterior en dos matrices, M y N. M será una matriz 3 × 4 que recoja la producción por minuto y N una matriz 4×3 que recoja los precios. s.**

b) **Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz M · N y dar su significado.**

c) **Hacer lo mismo para la matriz N·M.**

(Univ. de Alicante)

a) Matriz de la producción por minuto:

$$M = \begin{array}{cccc|l} 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 & \leftarrow \text{longitud de los clavos} \\ \end{array}$$

$$M = \left[\begin{array}{cccc} 100 & 200 & 500 & 300 \\ 50 & 20 & 30 & 10 \\ 700 & 600 & 400 & 800 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{clavos tipo A} \\ \leftarrow \text{" " Q} \\ \leftarrow \text{" " H} \end{array}$$

Esta matriz hay que interpretarla de la siguiente forma: por ejemplo, el elemento $a_{23} = 30$ significa que en un minuto se producen 30 clavos de 2 cm. de longitud del tipo Q, el elemento $a_{32} =$ $= 600$ significa que en un minuto se producen 600 clavos de 1,5 cm. de longitud del tipo H.

Matriz de los precios de los clavos según su longitud y tipo:

$$\begin{array}{ccc|l} A & Q & H & \leftarrow \text{tipo de los clavos} \end{array}$$

$$N = \left[\begin{array}{ccc} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & 1{,}00 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{clavos de longitud 1} \\ \leftarrow \text{" " " 1,5} \\ \leftarrow \text{" " " 2} \\ \leftarrow \text{" " " 2,5} \end{array}$$

($b_{32} = 0{,}60$ significa que el clavo del tipo Q de 2 cm. de longitud vale 0,60 pesetas)

b) Si M es una matriz de dimensiones 3 × 4 y N una matriz 4 × 3, las dimensiones de M · N serán 3 × 3.

Si a los elementos de M los simbolizamos por a_{ij}, a los de N por b_{ij} y a los de M·N por c_{ij}:

$$c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} + a_{14}\,b_{41} = 100\cdot0{,}20 + 200\cdot0{,}30 + 500\cdot0{,}40 + 300\cdot0{,}50 = 430 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo A producidos en un minuto es 430 pesetas

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} = 50\cdot0{,}30 + 20\cdot0{,}45 + 30\cdot0{,}60 + 10\cdot0{,}75 = 49{,}5 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo Q producidos en un minuto es 49,5 pesetas

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + a_{34}b_{43} = 700\cdot0{,}40 + 600\cdot0{,}60 + 400\cdot0{,}80 + 800\cdot1 = 1760 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo H producidos en un minuto es 1760 pesetas.

c) La matriz N·M es de dimensiones 4 × 4. Simbolizaremos sus elementos por d_{ij}:

$d_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} = 0{,}20 \cdot 100 + 0{,}30 \cdot 50 + 0{,}40 \cdot 700 = 315 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 1 cm. producidos en un minuto es 315 ptas.

$d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} = 0{,}30 \cdot 200 + 0{,}45 \cdot 20 + 0{,}60 \cdot 600 = 429 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 1,5 cm. producidos en un minuto es 429 pesetas.

$d_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} = 0{,}40 \cdot 500 + 0{,}60 \cdot 30 + 0{,}80 \cdot 400 = 538 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 2 cm. producidos en un minuto es 538 pesetas.

$d_{44} = b_{41}a_{14} + b_{42}a_{24} + b_{43}a_{34} = 0{,}50 \cdot 300 + 0{,}75 \cdot 10 + 1 \cdot 800 = 957{,}7 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 2,5 cm. producidos en un minuto es 957,7 pesetas.

2.15 **Probar que la matriz A tiene inversa y calcularla**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Cádiz)

Emplearemos el método de Gauss:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3') = (3) - m(4) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - m(3') \\ (3') \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1') = (1) - m(2') \\ (2') \\ (3') \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 & -m^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -m & m^2 & -m^3 \\ 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.16 **Calcular la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

Emplearemos el método de Gauss:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) + 2(1) \\ (3') = (3) + (1) \\ (4') = (4) + \frac{1}{2}(1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - \frac{1}{2}(2') \\ (4') \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') \\ (4'') = (4') + 2(3'') \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1') = (1) - \frac{2}{25}(4'') \\ (2') \\ (3''') = (3'') - \frac{2}{5}(4'') \\ (4'') \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 0 & \frac{24}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1'') = (1') - \frac{2}{5}(2') \\ (2'') = (2') + 2(3''') \\ (3''') \\ (4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{8}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 10 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1''') = -\frac{1}{2}(1'') \\ (2''') = \frac{1}{10}(2'') \\ (3'''') = -\frac{2}{5}(3''') \\ (4''') = \frac{2}{25}(4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.17 **Encontrar una matriz X que verifique la ecuación:**

$$A \cdot X + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Veamos si A tiene inversa:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - (1) \\ (3') = (3) - (2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2'') = \frac{1}{2}(2') \\ (3'') = \frac{1}{4}(3') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B) \Rightarrow (A^{-1}A)X=IX=\boxed{X=A^{-1}(C-B)}$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.18 **Hallar la matriz A que haga que** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

(Univ. de Madrid)

Sean $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Veamos si C tiene inversa:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2')=2(2)-5(1)\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{matrix}(1')=(1)-(2')\\(2')\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix}(1'')=\frac{1}{2}(1)\\(2')\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

la matriz C tiene inversa, siendo $C^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$$B=AC \Rightarrow BC^{-1}=(AC)C^{-1}=A(CC^{-1})=A\cdot I=A$$

$$A=BC^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-15 & -1+6 \\ 12-10 & -4+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

CAPITULO 3

DETERMINANTES Y MATRIZ INVERSA

DETERMINANTES.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se llama determinante de la matriz A al polinomio cuyos términos son todos los posibles productos de n factores tomados entre los n elementos de A, de modo que en cada término haya un solo factor de cada fila y un solo factor de cada columna, y afectando a cada término del signo + o del − según que las permutaciones de los índices de las filas y las columnas sean de la misma o distinta clase.

Se recuerda que entre las $n!$ permutaciones que se pueden formar con los n primeros números naturales, se llama permutación principal a la permutación 123 . . . . n.

En otra permutación cualquiera, se dice que dos elementos forman *inversión* cuando están en orden contrario que en la permutación principal. Se dice que una permutación es *par* o *impar*, según sea par o impar el número de sus inversiones.

Para hallar el número de inversiones de una permutación basta con comparar cada elemento con todos los que le siguen. En la permutación 3214, el 3 forma inversión con el 2 y con el 1, el 2 forma inversión con el 1, y el 1 no forma inversión con el 4. Hay, pues, tres inversiones, por tanto la permutación es impar.

Para hallar el signo de cada término del determinante, se ordenan los elementos que en él intervienen escribiendo en primer lugar el que pertenece a la primera fila, en segundo lugar el de la segunda fila, y así sucesivamente hasta escribir el de la última fila. De este modo, la permutación correspondiente a las filas será la principal, que es par, y sólo habrá que estudiar la permutación correspondiente a las columnas.

El número de términos de un determinante de orden n es $n!$

El determinante de la matriz cuadrada A de orden n se simboliza por $|A|$, o por det (A), o escribiendo los elementos de A entre dos rectas verticales:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantes de segundo orden.

Aplicando la definición:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Un determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 3 + 8 = 11$$

Determinante de tercer orden.

Aplicando la definición:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Los términos con signo + son el formado por los elementos de la diagonal principal y cada paralela a ella con el elemento del vértice opuesto. Los términos con signo − son el formado por los elementos de la diagonal secundaria y cada paralela a ella con el elemento del vértice opuesto. *(Regla de Sarrus).*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot(-1)\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot(-7) - 4\cdot 5\cdot(-7) - 2\cdot 6\cdot 8 - 3\cdot(-1)\cdot 9 =$$
$$= 90 - 32 - 126 + 140 - 96 + 27 = 3$$

Propiedades de los determinantes:

1. Un determinante que tiene todos los elementos de una línea (fila o columna) iguales a 0, es igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0\text{, por tener la primera columna y la tercera iguales.}$$

3. Un determinante en el que los elementos de una línea son múltiplos de los elementos de una paralela a ella es nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & -6 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0\text{, porque la segunda fila es igual a la primera multiplicada por } -2.$$

4. Un determinante en el que los elementos de una línea son combinación lineal de los de otras líneas paralelas a ella es nulo.

$$\begin{vmatrix} a & d & a+2d \\ b & e & b+2e \\ c & f & c+2f \end{vmatrix} = 0\text{, porque la tercera columna es igual a la primera más dos veces la segunda.}$$

5. El valor de un determinante no varía si se cambian las filas por las columnas sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una. Es lo mismo que decir que el determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz transpuesta: $|A^t| = |A|$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

6. Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea los correspondientes de otra paralela a ella multiplicados por un número λ, los de otra multiplicados por μ, etc.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + 3b - 2c & b & c \\ d + 3e - 2f & e & f \\ g + 3h - 2i & h & i \end{vmatrix}$$

7. Si se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$$

8. Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un mismo número λ, el valor del determinante queda multiplicado por λ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & f \\ g & 5h & i \end{vmatrix} = 5 \cdot |A|$$

9. Si en un determinante todos los elementos de una línea son múltiplos de un número λ, se puede sacar este número como factor.

$$\begin{vmatrix} 6a & -4b & c \\ 6b & -4e & f \\ 6g & -4h & i \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

10. Si se multiplican todos los elementos de un determinante $|A|$ de orden n por un mismo número λ, el valor del nuevo determinante es $\lambda^n \cdot |A|$. Equivale a decir que $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5^3 \cdot |A|$$

11. Si los elementos de una línea constan de h sumandos, se puede descomponer el determinante en suma de h determinantes que tienen iguales a él las restantes líneas, y en lugar de aquélla la formada por los primeros sumandos, por los segundos, . . ., y por los h–ésimos respectivamente.

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & a & d \\ x_2 + y_2 + z_2 & b & e \\ x_3 + y_3 + z_3 & c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & d \\ x_2 & b & e \\ x_3 & c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & a & d \\ y_2 & b & e \\ y_3 & c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & a & d \\ z_2 & b & e \\ z_3 & c & f \end{vmatrix}$$

Por ser idénticas las segundas columnas y las terceras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & -3 & 1 \\ 1+4 & 0 & 7 \\ 3+6 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

12. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & f & h & 0 \\ d & g & i & j \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot h \cdot j$$

Esta propiedad, junto con la 6., nos facilita el cálculo del valor de un determinante, transformándolo en otro igual a él que tenga nulos los elementos situados por encima (o por debajo) de la diagonal principal.

$$\begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} (1) & (2')=(2)-2(1) & (3) & (4')=(4)+3(1) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{cccc} (1) & (2') & (3')=(3)+(2') & (4'')=(4')+3(2') \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} (1) & (2') & (3') & (4''')=(4'')-(3') \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot 3 = 45$$

13. El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B, de igual orden, es igual al producto de los determinantes de A y de B: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = -12 \ ; \ |B| = 11 \Rightarrow |A| \cdot |B| = -132$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 25 \\ 11 & 31 & 43 \\ -8 & -10 & -16 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 11 & 17 & 25 \\ 11 & 31 & 43 \\ -8 & -10 & -16 \end{vmatrix} = 11 \cdot 31 (-16) + 17 \cdot 43 \cdot (-8) + 25 \cdot 11 \cdot (-10) - 25 \cdot 31 \cdot (-8) - 17 \cdot 11 \cdot (-16) -$$

$$- 11 \cdot 43 \cdot (-10) = -5456 - 5848 - 2750 + 6200 + 2992 + 4730 = -132$$

14. Todo determinante nulo tiene, al menos, una fila (y una columna) que es combinación lineal de las restantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \\ 11 & -18 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 110 - 216 + 198 - 90 - 8 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \\ 11 & -18 & -1 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{ccc} (1) & (2')=(2)+2(1) & (3')=(3)-3(1) \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -17 \\ 11 & 4 & -34 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{ccc} (1) & (2') & (3'')=2(3')+17(2') \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 11 & 4 & 0 \end{array}\right| \end{array} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(3'') = 2[(3)-3(1)] + 17[(2)+2(1)] = 2(3)+28(1)+17(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3) = -14(1) - \frac{17}{2}(2)$$

la tercera columna es igual a la primera multiplicada por -14 más la segunda multiplicada por $-\frac{17}{2}$.

Si operamos sobre las filas obtendremos que la tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2 más la segunda multiplicada por 3.

Menor complementario de un elemento. Si en un determinante $|A|$ de orden n se suprimen la fila de lugar i y la columna de lugar j, se obtiene un determinante de orden $n-1$ que se llama menor complementario del elemento a_{ij}. Se simboliza por α_{ij}.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \quad ; \quad \alpha_{21} = \left|\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \quad ; \quad \alpha_{13} = \left|\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

Adjunto del elemento a_{ij}, es igual al menor complementario del elemento a_{ij} afectado del signo $+$ o $-$ según que $i+j$ sea par o impar. Se simboliza por A_{ij}, siendo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \quad ; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \alpha_{21} = -\left|\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \quad ; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \alpha_{13} = \left|\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right| = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} \end{cases}$$

Esta propiedad facilita el cálculo de un determinante de orden n al poderlo expresar como suma de determinantes de orden $n-1$, éstos a su vez se expresarán en función de otros de orden $n-2$, etc. Así se llega a expresar el determinante primitivo en función de determinantes de segundo o tercer orden.

Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right| = 1 \cdot \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -8 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right| - 2\left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -8 \\ -1 & 4 & 2 \end{array}\right| - (-3)\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right| = (-6+48-48+18+$$

$$+32-24) - 2(-12+36+24-9+64-18) + 3(32+18+3+12+12-12) = 20 - 2(85) + 3(65) = 45$$

La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos correspondientes a los elementos de una línea paralela, es nula. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de cuarto orden:

$$a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} + a_{14} \cdot A_{34} = 0 \quad ; \qquad a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} + a_{43} \cdot A_{42} = 0$$

Determinante de Vandermonde. Es el formado por las potencias sucesivas de n números distintos: $a, b, c, \dots, g, h,$ ordenadas del siguiente modo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & b & c & \cdots & g & h \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & g^2 & h^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \cdots & g^{n-1} & h^{n-1} \end{vmatrix}$$

Es igual al producto de todas las diferencias obtenidas restando cada número $a, b, c, \dots, g, h,$ de todos los que le siguen:

$$D = (b-a)(c-a)\dots(g-a)(h-a)\cdot(c-b)\dots(g-b)(h-b)\dots(g-c)(h-c)\dots(h-g)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2^2 & 4^2 & 7^2 & 9^2 \\ 2^3 & 4^3 & 7^3 & 9^3 \end{vmatrix} = (4-2)(7-2)(9-2)(7-4)(9-4)(9-7) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 2100.$$

Matriz singular. Se llama así a la matriz cuadrada cuyo determinante es nulo.

Matriz regular. Se llama así a toda matriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & a \end{bmatrix} \quad ; \qquad |M| = 10a + 24 - 21 + 20 - 28 - 9a = a - 5$$

La matriz M es singular si $a = 5$, y es regular si $a \neq 5$.

MATRIZ INVERSA.

Sea A una matriz cuadrada y regular, de orden n. Se llama **matriz inversa** de A, a la matriz cuadrada de orden n, que se simboliza por A^{-1}, tal que:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

La matriz A tendrá inversa si y solo si es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix}$$

En la práctica, para hallar la matriz inversa de la matriz A, se hacen los siguientes pasos:

1º. Se halla el determinante de A. Sólo si $|A| \neq 0$ se continua, pues si $|A| = 0$ no existe la matriz inversa de A.

2º. Se escribe la transpuesta de A.

3º. Se sustituye cada elemento de A^t por su adjunto y se divide la matriz resultante por $|A|$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $|A| = 8 - 3 = 5$; $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $|A| = 2$; $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz cuadrada A es de orden mayor que tres, el cálculo de su matriz inversa suele ser menos laborioso por el método de Gauss.

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden y regulares, se verifica:

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

Si A es una matriz regular, la transpuesta de la inversa de A es igual a la inversa de la transpuesta de A:

$$\boxed{(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}}$$

La matriz inversa facilita la resolución de la ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$ cuando A es una matriz cuadrada regular:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Sea reslover la ecuación $AX = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 10 & 1 & 23 \end{bmatrix}$

Según hemos visto, como $|A| = 1 \neq 0$: $X = A^{-1}B$

Hallemos la matriz inversa de A:

$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 10 & 1 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Los sistemas de ecuaciones lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas, en los que la matriz de los coeficientes es regular se puede transformar en una ecuación matricial del tipo anterior:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ecuación que podemos simbolizar así: $AX = B$

Si $|A| \neq 0$: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Sea resolver el sistema
$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \end{array}\right|$$

El sistema se puede escribir de la forma
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ; \qquad AX = B$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 8 + 5 - 6 - 10 + 8 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$$

existe la inversa de A, y por lo tanto $AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$.

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 2, \; y = 1, \; z = -1$$

PROBLEMAS

3.1 Calcular
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

La tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2, o sea que el determinante tiene dos filas proporcionales, por tanto es igual a 0.

3.2 Calcular
$$D = \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Sacando factor común: a de la primera fila, b de la segunda y bc de la tercera:

$$D = ab^2c \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ bc & -b & 3a \end{vmatrix}$$

sacando factor común: bc de la primera columna, b de la segunda y a de la tercera:

$$D = (ab^2c)(b^2ca) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a^2b^4c^2(6+1+1-2-1-3) = \boxed{2a^2b^4c^2}$$

3.3 ¿Qué diferencia existe entre menor complementario y adjunto de un elemento? Si hay alguna relación entre ambos conceptos, exprésala.

(Univ. de León)

En un determinante de orden n, **el menor complementario** del elemento a_{ij} es el determinante de orden $n-1$ que resulta al tachar, en el primitivo, la fila i y la columna j.

En un determinante de orden n, el **adjunto** del elemento a_{ij} es igual al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de orden $n-1$ que resulta al tachar, en el primitivo, la fila i y la columna j.

Si designamos por α_{ij} el menor complementario del elemento a_{ij} y por A_{ij} el adjunto de a_{ij} se verificará:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

si $i + j$ es un número par: $\quad A_{ij} = \alpha_{ij}$

" " " " " impar: $\quad A_{ij} = -\alpha_{ij}$

3.4 **Obtener, en función de a, b y c, el valor del determinante:**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Restando la primera fila a todas las demás y desarrollando después por los elementos de la última columna:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = (-1)abc = \boxed{-abc}$$

3.5 **Resolver, sin desarrollar, aplicando y justificando las propiedades utilizadas de los determinantes:**

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Córdoba)

Sacando a factor común de los elementos de la primera fila, b de los de la segunda y c de los de la tercera:

$$D = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

restando la primera fila de las otras dos:

$$D = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$D = a\,b\,c \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & (b+a)(b-a) \\ c-a & (c+a)(c-a) \end{vmatrix}$$

sacando factor común $(b-a)$ de los elementos de la primera fila y $(c-a)$ de los de la segunda fila:

$$D = a\,b\,c\,(b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = \boxed{a\,b\,c\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

Se podrían haber simplificado los cálculos considerando que el determinante que queda después de la primera reducción es un determinante de Vandermonde.

3.6

Calcular el valor del siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrdid, 1991)

Sacando 5 factor común de la primera fila, 3 de la segunda y 7 de la tercera:

$$D = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

el determinante que nos queda es un determinante de Vandermande:

$$D = \boxed{105\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

3.7

Calcular el valor del determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$$

(log simboliza el logaritmo decimal).

(Univ. de Alicante)

Es un determinante de Vandermonde, por tanto:

$$D = (\log 30 - \log 3)\,(\log 300 - \log 3)\,(\log 300 - \log 30) = \log \frac{30}{3} \cdot \log \frac{300}{3} \cdot \log \frac{300}{30} =$$

$$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

3.8 **Calcular**

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

Restando a la primera fila la cuarta y a la segunda la tercera:

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 & b^2-a^2 \\ 0 & a^2-b^2 & b^2-a^2 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

sumando a la cuarta columna la primera, y a la tercera la segunda:

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ ab & b^2 & a^2+b^2 & 2ab \\ b^2 & ab & 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

desarrollando este determinante por los elementos de la primera fila, así como el resultante:

$$D = (a^2-b^2) \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2+b^2 & 2ab \\ ab & 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a^2-b^2)(a^2-b^2) \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-b^2)^2 \left[(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 \right] = (a^2-b^2)^2 (a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2) =$$

$$= (a^2-b^2)^2 (a^2-b^2)^2 = \boxed{(a^2-b^2)^4}$$

3.9 **Sabiendo que** D_1 **= determinante de** $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 1$

utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcular

D_2 **= determinante de** $\begin{bmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{bmatrix}$

y D_3 **= determinante de** $\begin{bmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{bmatrix}$

(Univ. de Zaragoza)

Sumando a los elementos de la primera fila los correspondientes elementos de la segunda fila multiplicados por 3, el valor del determinante no varía:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

sacando (-1) factor común de los elementos de la segunda fila:

$$D_2 = (-1)\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

conmutando entre sí la segunda y la tercera columnas, el determinante cambia de signo:

$$D_2 = (-1)\,(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D_1 = 1$$

Cambiando entre sí, en D_3, la primera y tercera columnas, el determinante cambia de signo:

$$D_3 = \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

cambiando entre sí la primera y segunda filas, el determinante cambia de signo:

$$D_3 = (-1)\,(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D_1 = 1$$

3.10 Demostrar que

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

(Univ. de Madrid)

Llamaremos D al determinante.

Desarrollando D por los elementos de la última columna:

$$D = (a-x)\cdot(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+5}\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b \end{vmatrix}$$

El primer determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, ya que los elementos por debajo de esta diagonal son todos nulos. El segundo determinante lo desarrollamos por los elementos de la última columna:

$$D = (a-x)\,(-x)^4 - \left(b(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ e & d & c \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (a-x)x^4 - b(-x)^3 + (cx^2 + e + dx) = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

3.11 **Dada la ecuación:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

se pide: Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes hallar dos soluciones de la ecuación dada sin desarrollar el determinante del primer miembro.

(Univ. de Madrid)

a) Como un determinante es nulo si tiene dos filas (o columnas) iguales, el determinante dado se anulará si $x = 1$, pues en este caso la segunda fila es igual a la primera. Resulta de aquí que $x = 1$ es una raíz de la ecuación.

b) También para $x = -1$ la tercera fila es igual a la primera, luego $x = -1$ es otra raíz de la ecuación.

3.12 **Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

(Univ. de Madrid)

Sumando a la tercera columna la segunda, el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

y este determinante es igual a cero puesto que tiene dos columnas proporcionales, la tercera es igual a la primera multiplicada por $a + b + c$.

3.13 **Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:**

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Haremos las siguientes operaciones:

1º) Sacar factor común a de la primera fila, b de la segunda y c de la tercera:
2º) Multiplicar la primera columna por abc:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & a & a^2 \\ \frac{1}{b} & b & b^2 \\ \frac{1}{c} & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{abc}{a} & a & a^2 \\ \frac{abc}{b} & b & b^2 \\ \frac{abc}{c} & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

3.14 Sin desarrollar ninguno de los dos determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Sumando a la primera columna las otras dos, en el primer determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(m+n+l) & n+l & l+m \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ m+n+l & n+l & l+m \\ x+y+z & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

Restando a la segunda y tercera columnas la primera:

$$D = 2 \begin{vmatrix} a+b+c & -a & -b \\ m+n+l & -m & -n \\ x+y-z & -x & -y \end{vmatrix}$$

Sumando a la primera columna las otras dos:

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ l & -m & -n \\ z & -x & -y \end{vmatrix}$$

Sacando de la segunda columna y de la tercera factor común -1:

$$D = 2(-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} c & a & b \\ l & m & n \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & a & b \\ l & m & n \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

Intercambiando la primera columna con la segunda y tercera el determinante no varía, pues tendremos dos cambios de signo: $(-1)\cdot(-1) = 1$:

$$D = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

que es lo que queríamos obtener.

3.15 **Demostrar que es 4 el valor máximo que puede tomar un determinante de tercer orden cuyos elementos son todos iguales a $+1$ ó a -1.**

(Univ. de Sevilla)

Si los elementos del determinante D son $+1$ ó -1, los términos del desarrollo de D:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$$

pertenecen al conjunto $\{1, -1\}$, luego los valores posibles de D son $6, 4, 2, 0, -2, -4, -6$.

Cualesquiera que sean los valores de a, b y c, sumando o restando a la segunda y tercera columna la primera, (según sean los signos de a, b y c) podemos reducir a 0 los elementos segundo y tercero de la primera fila. El determinante quedará de la forma:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e \pm d & f \pm d \\ g & h \pm g & i \pm g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & m & n \\ g & p & g \end{vmatrix} = a(mg - np)$$

$a \in \{1, -1\}$ y m, g, n, p pertenecen al conjunto $\{0, 2, -2\}$, los valores posibles de $D = a(mg-np)$ son $8, 4, 0, -4, -8$.

De todo lo anterior se deduce que los valores posibles de D son $4, 0, -4$ y como existen valores de D igual a 4, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

el valor máximo que puede tomar D es 4.

(Como curiosidad indicaremos que al poder ser cada elemento de D igual a ± 1, la matriz D puede tener $2^9 = 512$ formas distintas).

3.16 **Dadas las matrices** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **y** $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

calcular $\dfrac{A+B}{2}$, $(A-B)^2$, A^{-1} **y** B^{-1}.

(Univ. de Oviedo)

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-3 & 2+2 \\ 2+2 & 3-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 1-(-3) & 2-2 \\ 2-2 & 3-(-1) \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3-4 = -1 \; ; \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \; ; \quad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = B \quad \Rightarrow$$

$$B^{-1} = A$$

3.17 **Sean las matrices**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) $A \cdot B + C$

b) **¿Es cierto que** $|AB + C| = |AB| + |C|$?

c) **Calcular, si es posible** D^{-1}

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

a) $$A \cdot B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) No se verifica, en general, que el determinante de la suma de dos matrices es igual a la suma de los determinantes de las dos matrices.

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} |AB+C| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5+6 = 1 \\[2ex] |A \cdot B| + |C| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (12+10) + (-4-3) = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow |AB+C| \neq |AB| + |C|$$

c) $|D| = -4-3 = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ existe D^{-1}

$$D^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad D^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

3.18 **Dada la matriz** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{bmatrix}$, **averiguar para qué valores del parámetro** m **existe** A^{-1}**. Calcular** A^{-1} **para** $m = 2$**.**

(Univ. de Castilla–La Mancha)

La matriz cuadrada A tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 \; ; \quad |A| = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $m \notin \{1, 3\}$.

$$\text{Para } m = 2: \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \quad |A| = 1 \; ; \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \; ;$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.19 **a) Calcular una matriz X que verifique la igualdad:**

$$A \cdot X = B \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

(Univ. de León)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ existe la inversa de A.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \; ; \; (A^{-1}A)X = IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; ; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 & 2+3 \\ -1+4 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $$X \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+5 & -12+10 \\ 6-3 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq B$$

Esto nos sirve de comprobación de que el producto de matrices no es conmutativo.

3.20 **Obtén razonadamente una matriz A que verifique la siguiente igualdad :**

$$3\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{bmatrix}$$

(Univ. de Valencia, 1991)

Sea $M = \begin{bmatrix}-6 & 3 & 3\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$; $N = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{bmatrix}$

como $|N| = \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$, N admite matriz inversa:

$$M + NA = P \Rightarrow NA = P - M \Rightarrow N^{-1}(NA) = N^{-1}(P-M) \Rightarrow (N^{-1}N)A = IA = \boxed{A = N^{-1}(P-M)}$$

Hallemos N^{-1}:

$$N^t = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \quad ; \quad N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

de donde: $$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 9 & 12\\ 9 & 11 & 13\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}18-18 & 27-22 & 36-26\\ 6+9 & 9+11 & 12+13\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5 & 10\\ 15 & 20 & 25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

3.21 **Resolver la ecuación matricial** $\begin{bmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d\\ e\\ f\end{bmatrix}$

siendo $abc \neq 0$.

(Univ. de Madrid)

Sean $A = \begin{bmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}d\\ e\\ f\end{bmatrix}$, $|A| = -abc \neq 0$, A tiene inversa.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = \boxed{X = A^{-1}B}$$

$$A^t = \begin{bmatrix}0 & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ a & 0 & 0\end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}b & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & b\\ a & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & c\\ a & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & c\\ b & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-abc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & -ac & 0 \\ -bc & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{c} \\ \frac{e}{b} \\ \frac{d}{a} \end{bmatrix}$$

3.22 **Hallar una matriz X tal que:**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Sea $A \cdot X = B$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 8 - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la matriz } A \text{ tiene inversa.}$$

$$A \cdot X = B \;\Rightarrow\; A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;;\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;;\; IX = A^{-1}B \;;\; \boxed{X = A^{-1}B}$$

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 8 & 3 & 0 \\ 25 & -22 & -2 & 0 \\ -12 & 11 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.23 **Resolver la ecuación matricial $^tA \cdot X = B + C$, siendo**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \det(^tA) = 1 \;\Rightarrow\; {}^tA \text{ tiene inversa.}$$

$${}^tA\cdot X = B + C \Rightarrow ({}^tA)^{-1}({}^tAX) = ({}^tA)^{-1}(B+C) \Rightarrow [({}^tA)^{-1}({}^tA)]X = \boxed{X = ({}^tA)^{-1}(B+C)}$$

Hallemos $({}^tA)^{-1}$:

$${}^t({}^tA) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad ({}^tA)^{-1} = \frac{1}{\det({}^tA)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.24 **Encontrar una matriz A que verifique:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Explica cómo justificarías que la matriz obtenida es regular.

(Univ. de Valencia, 1991)

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

$|B| = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la matriz B tiene inversa.

$$BA = C \Rightarrow B^{-1}(BA) = B^{-1}C \Rightarrow (B^{-1}B)A = B^{-1}C \Rightarrow IA = \boxed{A = B^{-1}C}$$

Hallemos B^{-1}:

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 & 12 & 6 \\ 12 & 18 & 0 \\ 24 & 18 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz A es regular si es cuadrada y su determinante no es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2+6 = 4 \neq 0 \Rightarrow A \text{ es regular}$$

Sin calcular la matriz A podíamos haber estudiado si es regular usando la igualdad $BA = C$:

$$\underset{(3\times3)}{B} \cdot \underset{(a\times b)}{A} = \underset{(3,3)}{C} \Rightarrow a = 3,\ b = 3; \text{ la matriz } A \text{ es cuadrada de orden } 3.$$

$$B \cdot A = C \Rightarrow |B \cdot A| = |C| \Rightarrow |B| \cdot |A| = |C|$$

$$|B| = 6\ ; \quad |C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 36 = 24$$

$$|B| \cdot |A| = |C| \Rightarrow 6 \cdot |A| = 24 \Rightarrow |A| = 4 \neq 0$$

3.25 **Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A + A^t = 2I$, y det $(A) = 2$, siendo I la matriz identidad, y A^t la transpuesta de la matriz A.**

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{array}{l} A + A^t = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \det(A) = 2 \Rightarrow ad - bc = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a = 2 \\ b+c = 0 \\ 2d = 2 \\ ad - bc = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ \qquad b = -c \qquad\qquad b = \mp 1 \\ d = 1 \\ \qquad 1 \cdot 1 - (c)\,c = 2\ ;\ c^2 = 1\ ;\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.26 **Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B = P^{-1}AP$.**

(Univ. de Madrid)

Sea $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ la matriz pedida, tal que $|P| \neq 0$.

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = IAP = AP \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+6b & -3a-5b \\ 4b+6c & -3b-5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-6b & 4b-6c \\ 3a-5b & 3b-5c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 4a+6b = 4a-6b \\ -3a-5b = 4b-6c \\ 4b+6c = 3a-5b \\ -3b-5c = 3b-5c \end{array}\right| \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 6b = -6b, \ b = 0 \\ \\ 3a = 6c, \ a = 2c \end{array}\right| \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \ c \neq 0$$

3.27 **Hallar la matriz X que satisface a la ecuación $AXB + C = D$ siendo**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

det. $A = 1$, det. $B = 1 \Rightarrow$ A y B tienen inversa.

$$AXB + C = D \Rightarrow AXB = D - C \Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

$$(A^{-1}A)X(BB^{-1}) = IXI = \boxed{X = A^{-1}(D-C)B^{-1}}$$

Hallemos las inversas de A y B:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.28 **Se considera la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostrar que la inversa de A^n es, precisamente $\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la forma de A^2 y A^3 podemos suponer que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

está demostrado, por inducción, que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A^n| = 1 \; ; \quad {}^t(A^n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad (A^n)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.29 Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa:

$$A = \begin{bmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. del País Vasco)

$$\text{det. } A = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2\,|x| - |x-2|$$

Considerando que $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) < 0 \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{"} \quad x < 0 \end{cases}$$

$|x| = -x$ | $|x| = x$ (0)

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{para } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{para } x < 2 \end{cases}$$

(2) $|x-2| = -x+2$ | $|x-2| = x-2$

$$\text{det. } A = 2\,|x| - |x-2| = \begin{cases} 2(-x) - (-x+2) = -x-2 & \text{para} \quad -\infty < x < 0 \\ 2x \quad - (-x+2) = 3x-2 & \text{''} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ 2x \quad - (x-2) \quad = x+2 & \text{''} \quad 2 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

La matriz A no tendrá inversa para los valores de x en que se anule el determinante de A.

En el intervalo $]-\infty\ , 0[$: $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

En el intervalo $[0, 2[$: $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

En el intervalo $[2, +\infty[$ no hay ningún valor de x que anule a $x+2$ (el valor -2 no pertenece a dicho intervalo).

La matriz A no tiene inversa si x es igual a -2 ó a $\frac{2}{3}$.

3.30 **Enunciar la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa.**
Estudiar si son equivalentes las siguientes afirmaciones:
a) Las matrices A y B tienen inversa
b) AB tienen inversa.

(Univ. de Madrid)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que ésta sea cuadrada y que su determinante sea distinto de cero.

Tal y como están redactadas, las afirmaciones a) y b) no son equivalentes:

Si A y B tienen inversas, son matrices cuadradas, pero si son de distinto orden no existe AB.

Si AB tiene inversa es una matriz cuadrada, pero puede que A y B no sean cuadradas, por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}\right| \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} ;$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$$

A·B tiene inversa, pero A y B no tienen inversa por no ser matrices cuadradas.

Si el enunciado hubiera sido: *Siendo A y B m[illegible] cuadradas del mismo orden estudiar si son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) las matrices A y B tienen inversa

b) AB tienen inversa

en este caso si son equivalentes. En efecto:

A, B y AB son matrices cuadradas

Si A y B tienen inversa: $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow |AB| = |A|\cdot|B| \neq 0 \Rightarrow$ AB tiene inversa.

Si AB tiene inversa $|AB| \neq 0 \Rightarrow |AB| = |A|\,|B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow$ A y B tienen inversa.

3.31 Siendo A, B y C matrices cuadradas del mismo orden, es sabido que de $AB = AC$ no puede deducirse en todo caso que sea $B = C$. Probar, no obstante, que si $|A| \neq 0$, sí se puede obtener la conclusión $B = C$.

(Univ. de Madrid)

Por ser A cuadrada y $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

Multiplicando, por la izquierda, la igualdad $AB = AC$ por A^{-1}:

$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow$ (por la propiedad asociativa del producto de matrices)

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow$ (por ser $A^{-1}A = I$, matriz unidad)

$$I \cdot B = I \cdot C \Rightarrow B = C$$

CAPITULO 4

RANGO DE UNA MATRIZ

RANGO O CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ.

Si en una matriz A de dimensión $m \times n$ se suprimen a filas y b columnas, se obtiene una matriz de dimensión $(m - a) \times (n - b)$ que se llama *submatriz* de A. Si la submatriz es cuadrada de orden h, o sea, está formada por los elementos comunes a h filas y h columnas, su determinante es un *menor de orden h* de A:

Si en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

se suprimen la fila segunda, y las columnas primera y cuarta, se obtiene la submatriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

formada por los elementos comunes a las filas primera, tercera y cuarta, y a las columnas segunda, tercera, quinta y sexta.

Si se suprimen la fila segunda, y las columnas primera, tercera y cuarta, se obtiene la submatriz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

formada por los elementos comunes a las filas primera, tercera y cuarta, y a las columnas segunda, quinta y sexta. Su determinante:

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

es un menor de orden 3.

Como la dimensión de la matriz A es 4×6, de A podremos formar menores de orden 1 (si se toman los elementos comunes a una fila y una columna), de orden 2 (si se toman los elementos comunes a dos filas y dos columnas), de orden 3 (si se toman los elementos comunes a tres filas y tres columnas) y de orden 4 (si se toman los elementos comunes a cuatro filas y cuatro columnas).

Dado un menor $|H|$ de una matriz A, formado por los elementos comunes a h filas y h columnas, se llama *menor orlado* de $|H|$ a todo menor de orden $h + 1$ formado por aquellas h filas más otra cualquiera de las restantes filas y por aquellas columnas más otra cualquiera de las restantes columnas.

En la matriz A del ejemplo anterior, podemos orlar el menor de orden 3:

$$|H| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

con la segunda fila y las columnas primera, tercera y cuarta, obteniendo, respectivamente, los menores orlados de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Si todos los menores de orden h de una matriz son nulos, también son nulos todos los menores de orden superior a h.

Todo menor de orden $h+1$ lo podemos desarrollar por los elementos de una fila (o columna), y vendrá expresado por una suma cuyos sumandos son el producto de un número por un menor de orden h (que por hipótesis es nulo) luego la suma es nula.

Si son nulos todos los menores obtenidos orlando un menor $|H| \neq 0$ de orden h, con la fila de lugar i y cada una de las columnas restantes, dicha fila es combinación lineal de las h filas que determinan $|H|$. (Igual si se trata de columnas).

Si no se puede orlar el menor $|H| \neq 0$ de orden h, por no existir columnas distintas de las que han determinado dicho menor, todas las filas que no figuran en $|H|$ son combinación lineal de las h que determinan $|H|$. (Igual si se trata de columnas).

Si la matriz A es cuadrada y su determinante es nulo, al menos una de sus filas (y una de sus columnas) es combinación lineal de otras filas (columnas).

Rango o característica de una matriz A es el mayor orden de los menores distintos de cero que se pueden obtener en la matriz. Se simboliza por r(A).

En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

se pueden formar menores de orden 1, de orden 2 y de orden 3. Todos los menores de tercer orden son nulos ya que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras (es igual a la primera más la segunda multiplicada por 2), y como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

el rango de A es 2.

Si en la matriz A hay algún menor no nulo de orden h, y son nulos todos los menores de órdenes superiores a h, el rango de A es h.

Si el rango de la matriz A es h, todo menor nulo de orden h se llama *menor principal* de A.

En la matriz A del último ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, es un menor principal porque el rango de A es 2, y 2 es el orden de este menor no nulo.

Si h es el rango de la matriz A y $|H|$ un menor principal, todas las filas (columnas) de la matri. A son combinaciones lineales de las h filas (columnas) que determinan $|H|$.

Si a una matriz A se le agrega o suprime una línea que es combinación lineal de otras paralelas, se obtiene otra matriz que tiene el mismo rango que A.

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

tiene el mismo rango que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ya que la tercera fila de A es igual a la primera multiplicada por 2, más la tercera.

Las matrices nulas son las únicas matrices que tienen su rango igual a cero.

CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Antes de empezar a operar es conveniente comprobar si con un simple examen se reconoce alguna fila o columna que sea combinación lineal de otras. En este caso se suprime dicha fila o columna y la matriz que nos queda tiene el mismo rango que A.

Hallar el rango de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La tercera fila es igual a la suma de las dos primeras, al eliminarla nos queda la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

que tiene el mismo rango que A. Como el menor de segundo orden $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$ es distinto de cero, y no se pueden formar menores de tercer orden, el rango de A es 2.

Si todos los elementos de una fila (o columna) son múltiplos de un número, pueden dividirse los elementos de esa fila (o columna) por dicho número, y nos quedará una matriz que tiene el mismo rango que la primitiva.

$$\text{rango de} \begin{bmatrix} 300 & -500 & 600 \\ 4 & -8 & 12 \\ 21 & -35 & 42 \end{bmatrix} = \text{rango de} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 2,$$

ya que $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1 \neq 0.$

Generalmente se suele operar así:

— Se halla un menor $|H| \neq 0$, y se orla con la fila i y las columnas restantes (o con la columna j y las filas restantes).

— Si todos estos orlados son nulos, la fila i (o la columna j) es combinación lineal de las filas (o de las columnas) de H, y se suprime. Nos quedará una matriz que tiene el mismo rango que A.

— Si entre los menores orlados hay algunos $|K|$ distinto de cero, se sigue trabajando con $|K|$ orlándolo del mismo modo que hemos indicado para $|H|$.

Siguiendo de esta forma, al ir aumentando el orden de los menores $|H|$, $|K|$, ..., e ir rebajando el número de filas (columnas), llegaremos a un menor $|L| \neq 0$ y no podremos orlarlo al no tener más filas (o columnas) que las que forman este menor. El rango de A es igual al orden de $|L|$.

Hallar el rango de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 10 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Orlando este menor con la tercera fila y la tercera, cuarta y quinta columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 7 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 60 - 105 + 10 = 0\ ; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 40 + 70 - 20 = 0\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 20 - 35 = 0$$

como estos menores son todos nulos, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, al tacharla nos queda una matriz que tiene el mismo rango que A.

$$\text{rango de } A = \text{rango de } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

orlando el mismo menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y las restantes columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{ al no poder formar menores de cuarto orden: } \text{rango de } A = 3$$

Si la matriz A es cuadrada, se halla $|A|$, si $|A| \neq 0$, el rango es igual al orden de A, y si $|A| = 0$ se procede como se ha indicado anteriormente.

Método de Gauss para obtener el rango de una matriz A.

Consiste en ir obteniendo sucesivamente, por transformaciones elementales sobre las filas (o columnas), matrices que tienen el mismo rango de A y tales que tengan nulos todos los elementos de la primera columna excepto el elemento común a la primera fila y primera columna, que sea distinto de cero el elemento común de la segunda fila y la segunda columna y nulos los situados por debajo de él en la segunda columna, que sea distinto de cero el elemento común a la tercera fila y tercera columna y nulos los situados por debajo de él en la tercera columna, etc. Se llegará así a una matriz cuyo rango se calculará fácilmente.

Si durante el proceso aparece alguna línea de ceros, se prescinde de ella.

Puede presentarse la necesidad de cambiar entre sí dos filas para que el elemento común a la fila i y a la columna i no sea nulo.

Hallar el rango de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 10 & 7 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{bmatrix}1&0&3&-2&1\\2&5&-1&2&0\\7&10&7&-2&3\\-1&-2&5&4&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{l}(1)=\\(2')=(2)-2(1)\\(3')=(3)-7(1)\\(4')=(4)+(1)\end{array}\begin{bmatrix}1&0&3&-2&1\\0&5&-7&6&-2\\0&10&-14&12&-4\\0&-2&8&2&2\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')-2(2')\\(4'')=5(4')+2(2')\end{array}\begin{bmatrix}1&0&3&-2&1\\0&5&-7&6&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&26&22&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&-2&1\\0&5&-7&6&-2\\0&0&26&22&6\end{bmatrix}$$

ngo de esta última matriz, que es igual que el rango de A, es 3, puesto que el menor

$$\begin{vmatrix}1&0&3\\0&5&-7\\0&0&26\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot26\neq0$$

e pueden formar menores de orden cuatro.

RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES DE UN ESPACIO VECTORIAL

El **rango de un sistema de vectores** es el número máximo de vectores linealmente independientes obtenidos del sistema. Es igual al rango de la matriz cuyas filas (o columnas) son las componentes de los vectores del sistema.

El rango de un sistema de vectores es igual a la dimensión del subespacio engendrado por este sistema de vectores. La dimensión del subespacio engendrado por un sistema de vectores es igual al rango de la matriz cuyas filas son las componenetes de los vectores del sistema.

Un sistema de n vectores de un espacio vectorial de dimensión n será una base si, y sólo si, un rango es igual a n. O lo que es lo mismo, si no es nulo el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son las componentes de los n vectores del sistema.

Rango de filas de una matriz M es el rango del sistema de vectores fila de la matriz.

Rango de columnas de una matriz M es el rango del sistema de vectores columna de la matriz.

Dada una matriz M, son iguales, el rango de filas y el rango de columnas de dicha matriz, e iguales al rango de la matriz M.

Para hallar el rango del sistema de vectores: $\{(1,3,0,-4),(2,1,3,2),(4,7,3,-6)\}$, hallamos el rango de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0&-4\\2&1&3&2\\4&7&3&-6\end{bmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix}1&3&0&-4\\2&1&3&2\\4&7&3&-6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-2(1)\\(3')=(3)-2(2)\end{array}\begin{bmatrix}1&3&0&-4\\0&-5&3&10\\0&5&-3&-10\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')+(2')\end{array}\begin{bmatrix}1&3&0&-4\\0&-5&3&10\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A \text{ tiene el mismo rango que } \begin{bmatrix}1&3&0&-4\\0&-5&3&10\end{bmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, el rango de A es 2, igual al rango del sistema de vectores dado.

La dimensión del subespacio engendrado por el sistema de vectores del último ejemplo es 2.

¿Es el sistema vectores $\{(1, 2, 3), (0, 3, 5), (0, 0, 4)\}$ una base de R^3?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ los tres vectores del sistema dado constituyen una base de } R^3.$$

PROBLEMAS

4.1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide: 1º) Calcular el rango de A.

2º) Hallar la matriz A^{12}.

(Univ. de Madrid)

1º) El único menor de orden 4, $|A|$ es nulo puesto que tiene una fila de ceros.

El menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de A es 3

2º) $$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^{12} = A^4 \cdot A^8 = \mathbf{O} \cdot A^8 = \mathbf{O}$, matriz nula de orden 4.

4.2 Hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Santiago)

La primera fila es igual a la suma de las otras dos, o sea que es combinación lineal de ellas. El rango de A es el mismo que el de la matriz que resulta de suprimir de A la primera fila:

$$\text{rango de } A = \text{rango de } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 \neq 0$, el rango de A es 2.

4.3 Estudiar el rango de A para los diferentes valores de t

$$A = \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{bmatrix}$$

¿Para que valores de $t \in R$ existe A^{-1}?

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Como A es una matriz cuadrada hallaremos su determinante. Restando de cada fila la anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 0 & 3-2t \end{vmatrix} = t(1-t)(3-2t)\,; \quad |A| = 0 \Rightarrow t(1-t)(3-2t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ 1 - t = 0\,;\ t = 1 \\ 3 - 2t = 0\,;\ t = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

si $t \notin \{0, 1, \frac{3}{2}\}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 3}$

si $t = 1$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\boxed{r(A) = 2}$

si $t = 0$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\boxed{r(A) = 2}$

si $t = \frac{3}{2}$: $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} \neq 0$, $\boxed{r(A) = 2}$

Sólo para $t \in R - \{0, 1, \frac{3}{2}\}$ existe A^{-1}, que son los valores de t que hacen $|A| \neq 0$.

4.4 **Calcular los valores de t para los que es 2 la característica de la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$$

(Univ. de Santiago)

La segunda fila es proporcional a la primera, de donde el rango de A es igual al rango de la matriz que resulta de suprimir la segunda fila:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$$

– si $t = 3$, la segunda fila, de esta última matriz, es proporcional a la primera, todos los menores de orden 2 serán nulos, y el rango será 1.

– si $t \neq 3$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t - 3 \neq 0$, el rango será 2.

El rango de A es 2 para todo valor de t distinto de 3.

4.5 **Calcular, según los valores de t, el rango de la matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

El rango de una matriz no cambia si a los elementos de una línea se le suman los elementos correspondientes de otra línea paralela multiplicados por un número.

Sumando a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera fila la segunda multiplicada por $-\frac{3}{2}$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \end{bmatrix}$$

Orlando el menor $|1|$ con la última columna y la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 8-2t \end{vmatrix} = 8 - 2t, \text{ que es nulo si } t = 4 \text{ y no nulo si } t \neq 4, \text{ de donde:}$$

$\boxed{\text{para } t = 4, \text{ el rango de } A \text{ es 1, y para } t \neq 4, \text{ el rango de } A \text{ es 2.}}$

4.6 **Calcular el rango de la matriz A, para todos los distintos valores de $t \in R$:**

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Castilla la Mancha, 1991)

La segunda fila es igual a la tercera multiplicada por -2, por lo tanto, al eliminar la segunda fila nos queda una matriz que tiene el mismo rango que A:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

orlando el menor $|1| = 1 \neq 0$, con la primera fila y las columnas primera, segunda y tercera resultan los siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} t & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3t \ ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} t & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = t$$

— si $\underline{t = 0}$, estos tres menores son nulos, y por tanto $\boxed{r(A) = 1}$

— si $\underline{t \neq 0}$, hay menores de segundo orden no nulos, luego $\boxed{r(A) = 2}$

4.7 **Calcular el rango de la matriz**

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y-z & x-z & y-z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

según los valores de x, y, z.

(Univ. de Pamplona)

El rango de M es igual al rango de la matriz que resulta de sumar a los elementos de una linea (fila o columna) los de otra paralela multiplicados por un número cualquiera.

Sumando a las columnas primera y segunda la tercera multiplicada por -1:

$$\text{rango } M = \text{rango}\begin{bmatrix} x-z & y-z & z \\ 0 & x-y & y-z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-z & y-z & z \\ 0 & x-y & y-z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-z)(x-y)$$

— si $\underline{x \neq z \ \text{ y } \ x \neq y}$: $\boxed{\text{rango de } M = 3}$

— si $\underline{x \neq z \ \text{ y } \ x = y}$: $\begin{vmatrix} x-z & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x - z \neq 0$, $\boxed{\text{rango } M = 2}$

— si $\underline{x = z \ \text{ y } \ x \neq y}$: $\begin{vmatrix} x-y & y-z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y \neq 0$, $\boxed{\text{rango } M = 2}$

— si $\underline{x = y = z}$: $M = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boxed{\text{rango } M = 1}$

4.8 **Hallar los valores de k para los cuales la matriz**

$$M = \begin{bmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{bmatrix}$$

a) no tiene inversa

b) tiene rango 3.

(Univ. del País Vasco)

a) La matriz M no tendrá inversa para los valores de k que anulen su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & -k & -1 \end{vmatrix}$$

restando de cada fila la anterior, el determinante no varía:

$$|M| = -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-1 & -2 & -4 \\ 0 & -k & -0 \end{vmatrix} = (-k)(-k)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -k-1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2(9-3k) \; ; \qquad |M| = 0 \Rightarrow -k^2(9-3k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 9-3k = 0, \; k = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{la matriz no tiene inversa si } k = 0 \text{ ó } k = 3.}$$

Si $k \notin \{0, 3\}$, el determinante de M no es nulo, el rango de M es 4.

Si $\underline{k = 0}$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{el menor} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

el rango de M es 3.

Si $\underline{k = 3}$:

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ orlando el menor } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ con la segunda}$$

da fila y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 27 - 3 - 6 = 24 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{el rango de M es 3.}}$$

4.9 **Dar ejemplo de una matriz de orden dos que tenga rango dos.**
" " " " " " " " " " " uno.
" " " " " " " " " " " cero.
" " " " " " " tres " " " dos.
" " " " " " " " " " " uno.
" " " " " " " " " " " cero.

(Univ. de Madrid)

Recordemos que el rango de una matriz es el mayor orden de los menores distintos de cero que se pueden hallar en la matriz.

Ejemplos de matrices de orden dos que tienen rango dos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices de orden dos que tienen rango uno:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de matriz de orden dos que tiene rango cero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices de orden tres que tienen rango dos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices de orden tres que tienen rango uno:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de matriz de orden tres que tiene rango cero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.10 **Calcular el rango de la matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

El rango de A es el mismo que el rango de la matriz que resulta de cambiar entre sí las dos primeras columnas:

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3') = (3) + 2(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 21 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3'') = (3') - 7(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

4.11 **Haciendo uso del método de Gauss, discutir el rango de la matriz B según los valores del parámetro a.**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(Univ. de Alicante)

El rango de una matriz no varía si se cambia el orden de sus columnas:

$$\text{rango } B = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & a \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2') = (2) + (1) \\ (3') = (3) + 3(1) \\ (4) \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a+1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & a \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - (2') \\ (4') = (4) - (3') \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

Si $a \neq 3$, todos los elementos de la diagonal principal, de esta última matriz que es triangular, serán distinto de 0, su determinante no es nulo, y su rango será 4.

Si $a = 3$:

$$\text{rango de } B = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

4.12 **Calcular el rango de la matriz**

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

Intercambiando entre sí las dos primeras columnas el rango no varía:

$$\text{rango } M = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3')=(3)-(1) \\ (4')=(4)-2(1) \\ (5')=(5)-(1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3'')=(3')+(2) \\ (4') \\ (5'')=(5')+2(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango } M = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

4.13 Hallar el rango de los siguientes sistemas de vectores:

a) (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 4, 5), (2, 4, 6)
b) (1, 2), (2, 3), (0, 1)

(Univ. de Madrid)

a) El rango del sistema de vectores es igual al rango de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2')=(2)-2(1) \\ (3')=(3)-3(1) \\ (4')=(4)-(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2') \\ (3'')=(3')-2(2') \\ (4'')=(4')+(2') \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango } M = 3 \Rightarrow \boxed{\text{rango pedido} = 3}$$

b)

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rango pedido} = 2}$$

4.14 Indicar para qué valores de t los vectores u = (1, 1, 1), v = (2, 2, t) y w = (t, 0, 0) no forman una base de R^3.

(Univ. de Santiago)

Los vectores dados no formarán una base si son linealmente dependientes, esto implica que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix} \leqslant 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0,\ t = 2}$$

4.15 **Hallar para qué valores de a los vectores $u = (a, 1, -2)$, $v = (1, a, 2)$ y $w = (2a, 1, 0)$ son linealmente independientes.**

(Univ. de Madrid)

Los vectores dados serán linealmente independientes si

$$\text{rango}\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & a & 2 \\ 2a & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \iff \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & a & 2 \\ 2a & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff 4a^2 + 2a - 2 \neq 0$$

$$4a^2 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{-2 \pm 6}{8} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \Rightarrow 4a^2 + 2a - 2 =$$

$$= 4(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{si } a \not\subset \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \text{ los vectores dados será l. i.}$$

4.16 **Determinar los valores de a y b para que el vector (1, 4, a, b) esté en el subespacio engendrado por los vectores (1, 2, −1, 2) y (0, 1, 2, 1).**

(Univ. de Zaragoza)

Si el vector (1, 4, a, b) pertenece al subespacio engendrado por los vectores (1, 2, −1, 2) y (0, 1, 2, 1), es que es combinación lineal de ellos, de donde se verificará:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 4 & a & b \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \leqslant 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{el rango es } 2$$

Orlando este menor con la tercera y cuarta columna obtenemos dos menores de orden 3 que deben ser nulos (de lo contrario el rango de la matriz sería 3, contra la hipótesis):

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4 + a + 1 - 8 = 0\ ;\ a - 3 = 0\ ;\ \boxed{a = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & b \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + b - 2 - 4 = 0\ ;\ b - 4 = 0\ ;\ \boxed{b = 4}$$

4.17 **Dados los vectores $A = (a, 8, 4)$, $B = (-1, 2, 0)$ y $C = 0,1,2)$, hallar a para que el vector A se pueda expresar como combinación lineal de B y C.**

(Univ. de Alicante)

El vector A será combinación lineal de los vectores B y C si es 2 el rango de la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} A' = A - 2C \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} a & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} A'' = A' - 3B \\ 3 \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} a+3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

si $a = -3$, el rango de M es 2, verificándose:

$$A'' = \mathbf{0}\ ; \quad A' - 3B = \mathbf{0}\ ; \quad A - 2C - 3B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A = 2C + 3B$$

4.18 **Sea V el espacio vectorial sobre el cuerpo Q de los números racionales de los polinomios de grado menor que 3, de una variable x. Comprobar si el vector**

$$\mathbf{v} = 4 - 7x - x^2$$

es combinación lineal de los vectores

$$\mathbf{a} = 2 - x + x^2; \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{2} - x^2\ ; \qquad \mathbf{c} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

(Univ. de La Laguna)

En el espacio vectorial sobre el cuerpo Q de los polinomios de grado menor que 3, de una variable, consideremos la base $\mathbf{B} = \{1, x, x^2\}$. Respecto de esta base, los vectores dados se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = (4, -7, -1)\ ; \quad \mathbf{a} = (2, -1, 1), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right); \quad \mathbf{c} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Estudiemos si los vectores **a, b** y **c** son l. i. ó l. d. hallando el rango de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$|M| = \dfrac{1}{4} + 1 + \dfrac{1}{8} \neq 0 \Rightarrow$ rango de $M = 3 \Rightarrow$ los vectores **a, b** y **c** l. i.

Como es 3 la dimensión del espacio vectorial sobre Q de los polinomios de grado menor que 3, de una variable, todo conjunto de más de 3 vectores será un conjunto de vectores l. d., de donde el vector **v** es combinación lineal de **a, b** y **c**.

CAPITULO 5

TEOREMA DE ROUCHE–FROBENIUS

TEOREMA DE ROUCHE–FROBENIUS.

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sea A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada con los términos independientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada sean iguales.

Si el rango de ambas matrices es igual al número de incógnitas, la solución es única. Si el rango es menor que el número de incógnitas, hay infinitas soluciones.

$r(A) = r(B) \Rightarrow$ **sistema compatible** (tiene solución)

- $r(A) = r(B) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ **sistema compatible determinado** (solución única)
- $r(A) = r(B) <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ **sistema compatible indeterminando** (infinitas soluciones)

$r(A) \neq r(B) \Rightarrow$ **sistema incompatible** (no tiene solución)

Estudiar, según los valores del parámetro a, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ -x + ay = 1 \end{array}\right\}$$

(Univ. de León)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz B es cuadrada, hallamos su determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = -1+2a-1-2 = 2a-4 \; ; \quad |B| = 0 \Rightarrow 2a-4=0 \; ; \quad a=2 \Rightarrow \text{si } a \neq 2, \; |B| \neq 0,$$

el rango de B es 3, y si $a = 2$, rango de $B = 2$, puesto que el único menor del tercer orden es nulo y existe al menos un menor de segundo orden distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 \neq 0.$

Como en A tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, y no podemos formar menores de tercer orden, el rango de A es 2 cualquiera que sea el valor de a.

De lo anterior se deduce:

$$a \neq 2 \begin{cases} \text{rango de } A = 2 \\ \text{rango de } B = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)}$$

$$a = 2 \begin{cases} \text{rango de } A = 2 \\ \text{rango de } B = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (una sola solución)}$$

Estudiar, según los valores del parámetro a, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + ay + z &= 4 \\ -6x - 6y + 4z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

(Univ. de Cantabria)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & a & 1 & 4 \\ -6 & -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A es cuadrada, hallaremos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & a & 1 \\ -6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 4a-12-72+18a+6-32 = 22a-110 \; ; \quad |A| = 0 \Rightarrow 22a-110=0, \; a = \frac{110}{22} = 5,$$

si $a \neq 5$, el rango de A es 3, y si $a = 5$ el rango de A es 2, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ es distinto de 0.

Si $a \neq 5$, el rango de B es 3, ya que el menor formado por las tres primeras columnas y las tres filas es igual a $|A| \neq 0$.

Si $a = 5$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \\ -6 & -6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-8 \neq 0,$$

orlando este menor con la tercera fila y la tercera columna obtendremos el determinante de A, que es nulo, luego sólo tenemos que estudiar el menor que resulta de orlar este menor con la tercera fila y la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ -6 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -10-48-72+90+24+16=0 \Rightarrow \text{el rango de B es 2.}$$

De lo anterior se deduce:

$$a \neq 5 \quad \begin{cases} \text{rango de A} = 3 \\ \text{rango de B} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)}$$

$$a = 5 \quad \begin{cases} \text{rango de A} = 2 \\ \text{rango de B} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)}$$

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Estudiado un sistema de ecuaciones lineales por medio de la regla de Rouché–Frobenius, si resulta compatible podemos hallar su solución. Además de los métodos expuestos en capítulos anteriores, podemos aplicar los determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Si el sistema (1) tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz A de los coeficientes será cuadrada, y el sistema será compatible determinado cuando $\det(A) \neq 0$. Se dice, en este caso, que es un sistema de Cramer:

El valor de cada incógnita viene dado por una fracción cuyo denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes y cuyo numerador es el determinante de la matriz que resulta de sustituir en la matriz de los coeficientes la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes.

El sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 5y + 2z &= -4 \\ 3x + 2y - 3z &= -6 \end{aligned}\right\}$$

es un sistema de Cramer, ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 30+18-2-15-8+9=32 \neq 0$$

y su solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{90-36+8+30-24-36}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{24+36+6-12+24+18}{32} = \frac{96}{32} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{60 - 36 + 12 + 90 + 18 + 16}{32} = \frac{160}{32} = 5$$

En el caso general de m ecuaciones con n incógnitas, si $r(A) = r(B) = h$, podemos suponer que un menor principal está constituido por las h primeras filas y las h primeras columnas, ya que un cambio en el orden de las ecuaciones de (1) y en el orden de sus incógnitas no modifica la naturaleza del sistema ni sus soluciones:

Si el menor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0$$

es un menor principal, las h primeras ecuaciones, cuyos coeficientes se corresponden con las filas del menor, se llaman **ecuaciones principales** y las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_h$, cuyos coeficientes se corresponden con las columnas del menor, se llaman **incógnitas principales**. El sistema (1) es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1h}x_h = b_1 - a_{1h+1}x_{h+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2h}x_h = b_2 - a_{2h+1}x_{h+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \cdots + a_{hh}x_h = b_h - a_{hh+1}x_{h+1} - \cdots - a_{hn}x_n \end{array}\right\}$$

Respecto de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_h$, este sistema es un sistema de Cramer. Estas incógnitas se obtienen en función de las $n - h$ restantes, que pueden tomar valores arbitrarios. A cada conjunto de valores que atribuyamos a $x_{h+1}, \ldots, x_n$, corresponde una solución del sistema (1).

Si hemos de resolver el sistema
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z + t = 5 \\ x + 2y + z - 2t = 8 \\ x + y - 2z + 3t = -3 \end{array}\right|$$

tendremos que estudiar previamente si es compatible.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Orlando el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$ con la tercera fila y las columnas tercera y cuarta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 3 - 1 + 2 - 2 + 6 = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 1 - 2 + 4 - 9 = 0$$

como estos dos menores son nulos, el rango de A es 2.

Para hallar el rango de B basta orlar el menor que nos ha dado el rango de A con la última columna de B:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 24 + 5 - 10 - 16 + 9 = 0$$

como este menor es nulo, el rango de B es 2:

$r(A) = r(B) = 2 <$ número de incógnitas $\Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Los elementos del menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, que nos ha dado el rango de A y de B se corresponden con las dos primeras ecuaciones y las incógnitas x, y. El sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 + z - t \\ x + 2y &= 8 - z + 2t \end{aligned}\right\}$$

que respecto de las incógnitas x, y es un sistema de Cramer, de donde:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5+z-t & 3 \\ 8-z+2t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10 + 2z - 2t - 24 + 3z - 6t}{1} = -14 + 5z - 8t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5+z-t \\ 1 & 8-z+2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 16 - 2z + 4t - 5 - z + t = 11 - 3z + 5t$$

y haciendo $z = \lambda$ y $t = \mu$, se obtiene la solución general:

$$\left.\begin{aligned} x &= -14 + 5\lambda - 8\mu \\ y &= 11 - 3\lambda + 5\mu \\ z &= \lambda \\ t &= \mu \end{aligned}\right|$$

A cada par de valores de λ y μ corresponde una solución particular (por ejemplo, si $\lambda = 0$, $\mu = 0$, se obtiene la solución $x = -14$, $y = 11$, $z = 0$, $t = 0$).

Si $r(A) = r(B) = n$, número de incógnitas, el sistema será compatible determinado. Las incógnitas principales serán las n incógnitas del sistema, y al dejar el sistema con las n ecuaciones principales, tendremos un sistema de Cramer.

SISTEMAS HOMOGENEOS.

Se llama así a los sistemas de ecuaciones lineales en los que son nulos los términos independientes de cada una de las ecuaciones. El sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

es un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas.

Este sistema siempre admite la solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada **solución trivial.**

Si el sistema admite la solución $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, distinta de la trivial, también admite la solución $x_1 = \lambda\alpha_1$, $x_2 = \lambda\alpha_2, \ldots, x_n = \lambda\alpha_n$, cualquiera que sea el número real λ. El sistema tiene infinitas soluciones.

El teorema de Rouché—Frobenius aplicado a un sistema lineal homogéneo dice: Si el rango de la matriz A de los coeficientes es igual al número de incógnitas, el sistema sólo admite la solución trivial, y si el rango de A es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si la matriz de los coeficientes es cuadrada, el sistema tendrá sólo la solución trivial si y sólo si $\det(A) \neq 0$, y tendrá infinitas soluciones si y sólo si $\det(A) = 0$.

Estudiar, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\left.\begin{aligned} 4x + 12y + 4z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \\ (m+2)x - 12y + 12z &= 0 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Madrid)

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A es cuadrada, para hallar su rango calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{vmatrix}$$

restando a la primera columna la cuarta, y desarrollando el determinante obtenido por los elementos de la primera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 0 & -13 & 2 \\ m-10 & -12 & 12 \end{vmatrix} = (m-10)\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ -13 & 2 \end{vmatrix} = (m-10)(24+52) = 76(m-10)$$

$|A| = 0 \Rightarrow 76(m-10) = 0 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow$ si $m \neq 10$ el rango de A es 3, y si $m = 2$, el rango de A es 2, ya que el menor $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix} = -52 - 24 \neq 0$.

De lo anterior se deduce:

si $a \neq 10$: rango de $A = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial

si $a = 10$: rango de $A = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS.

Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al número de incógnitas, sólo existe la solución trivial.

Si $r(A) = h <$ número de incógnitas, podemos suponer que un menor principal está constituido por las h primeras filas y las h primeras columnas, ya que un cambio en el orden de las ecuaciones de (2) y en el orden de sus incógnitas no modifica la naturaleza del sistema ni sus soluciones:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow$$

el sistema (2) es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1h}\,x_h = -a_{1h+1}x_{h+1} - \cdots - a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2h}\,x_h = -a_{2h+1}x_{h+1} - \cdots - a_{2n}\,x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{h1}\,a_1 + a_{h2}\,x_2 + \cdots + a_{hh}\,x_h = -a_{hh+1}\,x_{h+1} - \cdots - a_{hn}\,x_n \end{array}\right\}$$

Este sistema es un sistema de Cramer respecto de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_h$. Se obtienen estas incógnitas en función de las $n-h$ restantes, que pueden tomar valores arbitrarios. A cada conjunto de valores que atribuyamos a $x_{h+1}, \ldots, x_n$, corresponde una solución del sistema (2).

Para resolver el sistema
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z + t = 0 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \\ x + y - 2z + 3t = 0 \end{array}\right\}$$

hemos de hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

que como hemos visto en el ejemplo de la página 94 es 2, siendo $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$ un menor principal.

Como las filas de este menor se corresponden con las dos primeras ecuaciones, y las columnas se corresponden con los coeficientes de x e y, el sistema es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = z - t \\ x + 2y = -z + 2t \end{array}\right\}$$

que es un sistema de Cramer respecto de las incógnitas x e y, de donde:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z-t & 3 \\ -z+2t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2z-2t+3z-6t}{1} = 5z-8t \quad ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & z-t \\ 1 & -z+2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -2z+4t-z+t = -3z+5t$$

haciendo $z = \lambda$ y $t = \mu$, la solución general es

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\lambda - 8\mu \\ y = -3\lambda + 5\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{array}\right\}$$

PROBLEMAS

5.1 **Calcular el valor de m para que sea compatible el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 3 \\ x-3y &= 1 \\ 2x+y &= m \end{aligned}\right\}$$

(Univ. de Málaga)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango de } A = 2$$

$$|B| = -3m+4+3+18-2m-1 = -5m+24 \;;\; |B| = 0 \Rightarrow -5m+24 = 0 \;;\; m = \frac{24}{5}$$

si $m \neq \dfrac{24}{5}$	$\left\{\begin{array}{l}\text{rango } A = 2 \\ \text{rango } B = 3\end{array}\right.$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $m = \dfrac{24}{5}$	$\left\{\begin{array}{l}\text{rango } A = 2 \\ \text{rango } B = 2\end{array}\right.$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

5.2 **Comprobar que de los sistemas de ecuaciones siguientes uno es determinado, otro indeterminado y otro incompatible:**

a) $\left|\begin{aligned} 8x+y+4z &= 9 \\ 5x-2y+4z &= 6 \\ x+y &= 1 \end{aligned}\right.$ b) $\left|\begin{aligned} 6x-y+3z &= 6 \\ -6x+8y &= -10 \\ 2x-5y-z &= 4 \end{aligned}\right.$ c) $\left|\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 3x-4y &= 5 \\ 7x-y-3z &= 8 \end{aligned}\right.$

(Univ. de Madrid)

a)
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tanto en A como en B, la tercera fila es un tercio de la diferencia de la primera y la segunda, luego en el cálculo del rango podemos eliminar la tercera fila:

$$\text{rango de } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{puesto que} \quad \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{rango de } B = \text{rango} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{puesto que} \quad \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

rango A = rango B = 2 < número de incógnitas, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO
(tiene infinitas soluciones)

b)
$$C = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Empezamos estudiando la matriz C por ser cuadrada:

$$|C| = -48 + 90 - 48 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \text{el rango de } C \text{ es menor que } 3$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{el rango de } C \text{ es } 2$$

Para hallar el rango de D basta orlar el menor $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de C, con la última columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -10 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -150 - 48 + 10 - 96 = -284 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{el rango de } D \text{ es } 3$$

rango C = 2
rango D = 3 $\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

c)
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Empezamos estudiando la matriz E por ser cuadrada.

$$|E| = 12 - 3 + 28 + 9 = 46 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rango } E = 3$$

Como en F podemos tomar el mismo menor de orden 3 que nos ha dado el rango de E, y no podemos tomar menores de orden 4, el rango de F también es 3:

rango E = rango F = número de incógnitas $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO
(una sola solución)

5.3 **Encontrar todas las soluciones del sistema siguiente según los valores del parámetro a:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ 2x \quad\; + \; z = 2 \end{array}\right|$$

(Univ. de Barcelona)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tanto el rango de M como el de N es 2, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Como el menor que nos ha dado el rango de A y de B es el $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, al ser las columnas los coeficientes de x y de y, se toman estas incógnitas como principales, y el sistema dado se puede escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 - az \\ 2x \quad = 2 - z \end{array}\right| \Rightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{2}z \; ; \qquad y = 1 - az - x = 1 - az - 1 + \frac{z}{2} = \frac{1-2a}{2}z \quad \Rightarrow$$

haciendo $z = 2k$: $\boxed{x = 1 - k \quad ; \quad y = (1-2a)k \quad ; \quad z = 2k}$

a cada valor de k corresponde una solución del sistema.

5.4 **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = m \\ mx + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right|$$

a) Hacer un estudio de él según diferentes valores del parámetro m.
b) Resolver el sistema en los casos en que es compatible.

(Univ. de las Islas Baleares)

a) Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ m & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de A es 2, cualquiera que sea el valor de m.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 - m^2 - 9m + 8 + 2m = -m^2 - 7m + 8$$

$$|B| = 0 \Rightarrow m^2 + 7m - 8 \; ; \; m = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -8 \\ 1 \end{array}\right.$$

si $m \notin \{1, -8\}$: rango $A = 2$, rango $B = 3$	$\Rightarrow$	SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $m \in \{1, -8\}$: rango $A = 2$, rango $B = 2$	$\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (una sola solución)

b) Si $m \in \{1, -8\}$, como el menor que nos ha dado el rango de A (y de B) es $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = m \\ 3x - y = 2 \end{array}\right|$$

que es un sistema de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-m+2}{1} = 2 - m \quad ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = 4 - 3m$$

para	$m = 1$:	$x = 2 - 1 = 1$;	$y = 4 - 3 = 1$
"	$m = -8$:	$x = 2 - (-8) = 10$;	$y = 4 - 3(-8) = 28$

5.5 Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro m

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ mx & + & y & + & (m-1)\,z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array}\right|$$

(Univ. del País Vasco)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 + (m-1) + m^2 - 1 - m(m-1) - m = m - 1 \quad ; \quad |A| = 0 \iff m = 1$

si $\underline{m \neq 1}$: rango $A = 3$, rango $B = 3$	$\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(m+1) + (m-1) + m^2 - 1 - m(m-1)(m+1) - m}{m-1} = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ m & m & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{m+(m+1)(m-1)+m-m-(m-1)-m(m+1)}{m-1} = \frac{-m}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{1+m+m^2(m+1)-(m+1)-m^2-m}{m-1} = \frac{m^3-m}{m-1} = \frac{m(m^2-1)}{m-1} =$$

$$= \frac{m(m+1)(m-1)}{m-1} = m(m+1)$$

si $\underline{m = 1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de A es 2.

Orlando este menor, en B, con la tercera fila y la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+1+2-0-1-1 = 1 \neq 0 \text{, el rango de B es 3}$$

si $\underline{m=1}$: rango A = 2 ; rango B = 3	$\Rightarrow$	SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

5.6 **Discutir según los valores del parámetro k, y resolver en los casos que proceda, el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + ky + 3z &= 3 \\ y - z &= 0 \\ 3y - z &= 2 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de La Laguna-Tenerife)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k-2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2(k-2)-2+6 =$$

$$= -2k+8 \quad ; \quad |B| = 0 \Rightarrow k = 4$$

Si $k \neq 4$ el rango de B es 4, puesto que $|B| \neq 0$ es un menor de cuarto orden, y el rango de A es 3, por ejemplo el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\boxed{\text{si } k \neq 4: \quad \left.\begin{array}{l} \text{rango de } A = 3 \\ \text{rango de } B = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)}}$$

Si $k = 4$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

como $|B| = 0$, y el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ el rango de B es 3, así como el rango de A (este último menor lo podemos obtener en A).

$$\boxed{\text{si } k = 4: \quad \left.\begin{array}{l} \text{rango de } A = 3 \\ \text{rango de } B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO} \\ \text{(solución única)}\end{array}}$$

Para resolverlo se consideran como ecuaciones principales las que corresponden al menor que nos ha dado el rango de A y de B. El sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \quad 2y = 2 \; ; \; \boxed{y = 1} \qquad z = y \; ; \; \boxed{z = 1} \qquad x = 1 - 2y - 3z \; ; \; \boxed{x = -4}$$

5.7 Discutir y, en su caso, resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\}$$

(Univ. de Valladolid)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a + 8 + 2 - 12 + 2 + 2a = 5a \; ; \quad |M| = 0 \Rightarrow 5a = 0 , \quad a = 0$$

Como en N tenemos este mismo menor:

si $\underline{a \neq 0}$: rango de $M = 3$ rango de $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & -2 \\ b & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{6a + 2b - 8 - 3b + 4 - 8a}{5a} = \frac{-2a - b - 4}{5a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 4 & b & a \end{vmatrix}}{5a} = \frac{-8a - 16 + 2b + 32 + 2b - 4a}{5a} = \frac{-12a + 4b + 16}{5a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix}}{5a} = \frac{3b + 32 + 4 - 24 + 8 + 2b}{5a} = \frac{5b + 20}{5a} = \frac{b + 4}{a}$$

si $\underline{a = 0}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{bmatrix}$$

como $|M| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de M es 2, cualquiera que sea el valor de b.

Orlando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ con la segunda fila y la cuarta columna de N:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 3b - 4 - 2b + 8 = b + 4 \Rightarrow$$ este menor se anula para $b = -4$, de donde:

si $\underline{a = 0 \text{ y } b \neq -4}$: rango de $M = 2$ rango de $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $\underline{a = 0 \text{ y } = b = -4}$: rango de $M = 2$ rango de $N = 2$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para $a = 0$ y $b = -4$, el sistema dado es equivalente al sistema formado por la primera y tercera ecuación (correspondientes a las filas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de A y de B), considerando como incógnitas principales y, z (cuyos coeficientes son las columnas del menor anterior):

$$\left.\begin{array}{l} -y+z = 2-x \\ y \quad\; = -4-4x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 2-x+y = 2-x-4-4x = -2-5x \\ y = -4-4x \end{array}$$

haciendo $x = k$: $\boxed{x = k \;;\; y = -4-4k \;;\; z = -2-5k}$

5.8 **Discutir y resolver, en los casos en que ello sea posible, según los valores de los parámetros "a" y "b" el sistema siguiente:**

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z = 0 \\ ay+z = 2 \\ y+az = b \end{array}\right\}$$

(Univ. de Murcia)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & b \end{bmatrix}$$

$$|M| = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \quad ; \quad |M| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0, \; a = \pm 1$$

$$\boxed{\text{si } a \notin \{-1, 1\}: \left.\begin{array}{l} \text{rango } M = 3 \\ \text{rango } N = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO} \\ \text{(una sola solución)} \end{array}}$$

Sumando a la tercera ecuación la segunda multiplicada por $-a$ nos resulta un sistema equivalente al dado:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z = 0 \\ ay+z = 2 \\ (1-a^2)\,y \quad = b-2a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{ab+2a-b-2}{1-a^2} = \dfrac{-2-b}{1+a} \\ z = 2-ay = \dfrac{2-ab}{1-a^2} \\ y = \dfrac{b-2a}{1-a^2} \end{array}$$

Si $\underline{a = 1}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango de } M = 2$$

orlando este menor con la cuarta columna y la tercera fila de M:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-2 \Rightarrow \begin{cases} b \neq 2, & \text{rango de } N = 3 \\ b = 2, & \text{rango de } N = 2 \end{cases}$$

$$a=1\begin{cases} b\neq 2: \begin{cases}\text{rango } M = 2\\ \text{rango } N = 3\end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)}\\ b = 2: \begin{cases}\text{rango } M = 2\\ \text{rango } N = 2\end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)}\end{cases}$$

Para $\underline{a=1}$ y $\underline{b=2}$, el sistema es equivalente al formado por las dos primeras ecuaciones (que se corresponden con las filas que nos ha dado el rango), siendo las incógnitas principales x, y (que se corresponden con las columnas del menor que nos ha dado el rango):

$$\left.\begin{aligned} x+y &= -z\\ y &= 2-z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -z-2+z=-2\\ y &= 2-z\end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= -2\\ y &= 2-k\\ z &= k\end{aligned}}$$

Si $\underline{a=-1}$:

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix} \quad ; \quad N=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&-1&1&2\\0&1&-1&b\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rango de } M = 2 \;;\; \begin{vmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\0&1&b\end{vmatrix} = -b-2 \Rightarrow \begin{cases} b\neq -2, \text{ rango de } N = 3\\ b=-2, \text{ rango de } N = 2\end{cases}$$

$$a=-1\begin{cases} b\neq -2: \begin{cases}\text{rango } M = 3\\ \text{rango } N = 2\end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)}\\ b = -2: \begin{cases}\text{rango } M = 2\\ \text{rango } N = 2\end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)}\end{cases}$$

Para $\underline{a=-1}$ y $\underline{b=-2}$, el sistema es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= -z\\ -y &= 2-z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2-2z\\ y &= z-2\end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 2-2k\\ y &= k-2\\ z &= k\end{aligned}}$$

5.9 **Discutir y resolver en su caso, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{aligned} 3x-y+2z &= 1\\ x+4y+z &= b\\ 2x-5y+az &= -2\end{aligned}\right\}$$

(Univ. de Valencia)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{bmatrix}$$

Como en las dos matrices intervienen los parámetros, empezaremos estudiando el rango de M por ser cuadrada:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + 15 + a = 13a - 13 \ ; \quad |M| = 0 \Rightarrow 13a - 13 = 0 \ ; \quad a = 1$$

si $\underline{a \neq 1}$: rango $M = 3$, rango $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix}} = \frac{4a + 2 - 10b + 16 + 5 + ab}{13a - 13} = \frac{ab + 4a - 10b + 23}{13a - 13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{3ab + 2 - 4 - 4b + 6 - a}{13a - 13} = \frac{3ab - a - 4b + 4}{13a - 13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{-24 - 2b - 5 - 8 + 15b - 2}{13a - 13} = \frac{13b - 39}{13a - 13} = \frac{b - 3}{a - 1}$$

Si $\underline{a = 1}$:
$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

como $|M| = 0$, y $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13 \neq 0$, el rango de M es 2, cualquiera que sea b.

Orlando el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y la cuarta columna de N:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2b - 5 - 8 + 15b - 2 = 13b - 39$$

este menor se anula para $b = 3$, de donde:

si $\underline{a = 1 \text{ y } b \neq 3}$: rango $M = 2$, rango $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

si $\underline{a = 1 \text{ y } b = 3}$: $\left\{\begin{array}{l} \text{rango } M = 2 \\ \text{rango } N = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para $\underline{a = 1 \text{ y } b = 3}$, el sistema dado es equivalente al sistema formado por las dos primeras ecuaciones (correspondientes a las filas del menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de A y de B), considerando como incógnitas principales x e y (cuyos coeficientes son las columnas del menor anterior):

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 - 2z \\ x + 4y = 3 - z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 3-z & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{7-9z}{13} \ ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2z \\ 1 & 3-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8-z}{13}$$

haciendo $z = 13k$, resulta: $\boxed{x = \frac{7}{13} - 9k \ ; \quad y = \frac{8}{13} - k \ ; \quad z = 13k}$

5.10 **Analiza y resuelve en su caso, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y + az = b \end{array}\right|$$

(Univ. de Valencia, 1991)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{bmatrix} \ ; \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & b \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix} = 2(a-1-2) = 2(a-3)$$

si $\underline{a \neq 3}$ $\left\{\begin{array}{l} \text{rango } M = 3 \\ \text{rango } N = 3 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (una solución)

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ b & -1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix}} = \frac{3a - b + 1 - b - 3 + a}{2(a-3)} = \frac{4a - 2b - 2}{2(a-3)} = \frac{2a - b - 1}{a-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & b & a \end{vmatrix}}{2(a-3)} = \frac{-2a-6+2+2b}{2(a-3)} = \frac{-a+b-2}{a-3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix}}{2(a-3)} = \frac{2b-2-6-2}{2(a-3)} = \frac{b-5}{a-3}$$

Si $\underline{a = 3}$: $\quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & b \end{bmatrix}$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de M es 2.

Orlando el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y la cuarta columna de N:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & b-3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & b-3 \end{vmatrix} = 2(b-3-2) = 2(b-5)$$

si $\underline{b \neq 5}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango } M = 2 \\ \text{rango } N = 3 \end{array} \right.$	$\Rightarrow$	SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $\underline{b = 5}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango } M = 2 \\ \text{rango } N = 2 \end{array} \right.$	$\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para $a = 3$ y $b = 5$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left. \begin{array}{r} 2x + y = 3 - z \\ y = -1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = -y + 3 - z = 1 - z + 3 - z = 4 - 2z \; ; \quad x = 2 - z \\ y = -1 + z \end{array}$$

haciendo $z = k$ obtenemos la solución general:

$$\boxed{x = 2 - k \; ; \; y = -1 + k \; ; \; z = k}$$

5.11 **Discutir y resolver en los casos de compatibilidad el sistema**

$$\begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ 2b \end{bmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Teniendo en cuenta el producto y la igualdad de matrices el sistema se puede escribir de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + az &= b \\ ay + z &= b \\ x + ay + z &= 2b \end{aligned}\right| \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} a & 1 & a & b \\ 0 & a & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 2b \end{bmatrix}$$

Empezamos estudiando el rango de M por ser cuadrada:

$$|M| = a^2 + 1 - a^2 - a^2 = -a^2 + 1 \;;\quad |M| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \;;\; a^2 = 1 \;;\; a = \pm 1$$

para $a \notin \{1, -1\}$, $|M| \neq 0$, el rango de M es 3. El rango de N también es 3, cualquiera que sea b, porque en N tenemos el menor $|M| \neq 0$ y no podemos formar menores de cuarto orden por haber sólo tres filas.

$$\boxed{\text{si } a \notin \{1, -1\}: \begin{cases} \text{rango } M = 3 \\ \text{rango } N = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (una solución)}}$$

Se puede resolver por la regla de Cramer o bien matricialmente. Lo haremos por este último método. Como $|M| \neq 0$, existe M^{-1}:

$$M \cdot X = B \Rightarrow M^{-1}(MX) = M^{-1}B \Rightarrow (M^{-1}M)X = M^{-1}B \Rightarrow IX = \boxed{X = M^{-1}B}$$

$$M^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} 0 & a^2-1 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ -a & 1-a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$X = M^{-1}B = \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} 0 & a^2-1 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ -a & 1-a^2 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \\ 2b \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} (a^2-1)b + (1-a^2)2b \\ b - 2ab \\ -ab + (1-a^2)b + 2a^2 b \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} b(1-a^2) \\ b(1-2a) \\ b(a^2-a+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \dfrac{b(1-2a)}{1-a^2} \\ \dfrac{b(a^2-a+1)}{1-a^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = b \;;\; y = \frac{b(1-2a)}{1-a^2} \;;\; z = \frac{b(a^2-a+1)}{1-a^2}}$$

Si $\underline{a = 1}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 2b \end{bmatrix}$$

$$|M| = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de } M \text{ es } 2$$

Para hallar el rango de N basta orlar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de M, con la nueva columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = b \Rightarrow \text{si } b \neq 0, \text{el rango de } N \text{ es } 3, \text{ y si } b = 0, \text{ el rango de } N \text{ es } 2$$

si $\underline{a = 1 \; y \; b \neq 0}$:	rango $M = 2$ rango $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $\underline{a = 1 \; y \; b = 0}$:	rango $M = 2$ rango $N = 2$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para resolver el sistema en el caso en que $\underline{a = 1 \; y \; b = 0}$, se cogen como ecuaciones principales la primera y la segunda, y como incógnitas principales x e y, que se corresponden con el menor que nos ha dado el rango $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. El sistema es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -z \\ y &= -z \end{aligned}\right| \Rightarrow y = -z, \; x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \; ; \; y = -t \; ; \; z = t}$$

Si $a = -1$:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2b \end{bmatrix}$$

$$|M| = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de } M \text{ es } 2$$

Para hallar el rango de N basta orlar el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ con la nueva columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & b \\ 1 & -1 & 2b \end{vmatrix} = 3b \Rightarrow \text{si } b \neq 0, \text{el rango de } N \text{ es } 3, \text{ y si } b = 0, \text{ el rango de } N \text{ es } 2$$

si $\underline{a = -1 \; y \; b \neq 0}$:	rango $M = 2$ rango $N = 3$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)
si $\underline{a = -1 \; y \; b = 0}$:	rango $M = 2$ rango $N = 2$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para resolver el sistema en el caso en que $\underline{a = -1 \; y \; b = 0}$, se procede como en el caso anterior:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= z \\ -y &= -z \end{aligned}\right| \Rightarrow y = z, \; x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \; ; \; y = t \; ; \; z = t}$$

5.12 **Los números a, b, c se suponen conocidos. El sistema**

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + z &= a \\ x \quad\quad - z &= b \\ x \quad\quad + z &= c \end{aligned}\right\}$$

es siempre compatible determinado. ¿Porqué?

Resuelve el sistema y, como aplicación, calcula la inversa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Zaragoza)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$$ el rango de M es 3, cualesquiera que sean a, b y c.

Como en la matriz N podemos tomar el mismo menor: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, y no podemos formar menores de cuarto orden por haber sólo tres filas, el rango de B es también 3.

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:	rango $A = 3$ rango $B = 3$	$\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

— sumando las dos últimas ecuaciones : $2x = b + c$, $\boxed{x = \dfrac{b+c}{2}}$

— restando de la primera ecuación la última: $-3y = a - c$, $\boxed{y = \dfrac{c-a}{3}}$

— restando de la última ecuación la segunda: $2z = c - b$, $\boxed{z = \dfrac{c-b}{2}}$

Escribiendo el sistema dado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (1)$$

si M es la matriz de los coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$; como $|M| \neq 0$, M tiene inversa:

$$M \cdot X = P \Rightarrow M^{-1}(M \cdot X) = M^{-1}P \Rightarrow (M^{-1}M)X = M^{-1}P \Rightarrow IX = \boxed{X = M^{-1}P} \qquad (2)$$

La solución del sistema se puede escribir en forma matricial:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c \\ y &= -\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}c \\ z &= -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c \end{aligned}\right| \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (3)$$

identificando (2) y (3) resulta:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5.13 Discutir y resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ (a+1)x + y - az &= 0 \\ x + (a+1)y &= 0 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Madrid)

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad |M| = -a + (a+1)^2 - 1 + a^2(a+1) = a^3 + 2a^2 + a = a(a^2+2a+1) = a(a+1)^2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow a(a+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

para $a \notin \{0, -1\}$, rango $M = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial: $x = y = z = 0$

Si $\underline{a = 0}$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |M| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de M es 2}$$

para $a = 0$: rango $M = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Para resolver el sistema se toman como ecuaciones principales e incógnitas principales las correspondientes al menor que nos ha dado el rango, o sea las ecuaciones primera y segunda, y las incógnitas x e y. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} y &= -z \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow y = -z,\ x = z \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= t \\ y &= -t \\ z &= t \end{aligned}}$$

Si $a=-1$: $\quad M=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $|M|=0$ y $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ el rango de M es 2

para $a=-1$: rango $M=2<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Para resolver el sistema se toman como ecuaciones principales la primera y la segunda, y como incógnitas principales la x y la y, que corresponden al menor $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango:

$$\left.\begin{array}{r}-x+y=-z\\ y=-z\end{array}\right| \Rightarrow y=-z,\ x=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}x=0\\ y=-t\\ z=t\end{array}}$$

5.14 **Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro a**

$$\left.\begin{array}{r}a^2x+3y+2z=0\\ ax-y+z=0\\ 8x+y+4z=0\end{array}\right|$$

(Univ. del País Vasco)

$$M=\begin{bmatrix}a^2 & 3 & 2\\ a & -1 & 1\\ 8 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}a^2 & 3 & 2\\ a & -1 & 1\\ 8 & 1 & 4\end{vmatrix}=-4a^2+24+2a+16-a^2-12a=-5a^2-10a+40\ ;$$

$$|M|=0 \Rightarrow -5a^2-10a+40=0\ ;\quad a^2+2a-8=0\ ;\quad a=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\ -4\end{cases}$$

si $a\notin\{-4,2\}$: rango $M=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sólo existe la solución trivial.
si $a\in\{-4,2\}$: $|M|=0$, el rango de M es 2 $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $\underline{a=-4}$:

$$M=\begin{vmatrix}16 & 3 & 2\\ -4 & -1 & 1\\ 8 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

como $|M|=0$ y $\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 8 & 1\end{vmatrix}=-4+8=4\neq 0$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}-4x-y=-z\\ 8x+y=-4z\end{array}\right| \Rightarrow \quad 4x=-5z,\ x=-\frac{5z}{4} \qquad y=-4x+z=5z+z=6z$$

haciendo $z=4k$: $\quad\boxed{x=-5k\ ;\quad y=24k\ ;\quad z=4k}$

Si $\underline{a = 2}$:

$$M = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-6=-10 \neq 0$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ -2x - y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2z+3z}{-10} = \frac{-z}{2} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-4z+4z}{-10} = 0$$

haciendo $z = -2k$: $\boxed{x = k \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = -2k}$

5.15 Discutir y resolver
$$\left.\begin{array}{rl} (4-a)x - 5y + 7z = 0 \\ x - (4+a)y + 9z = 0 \\ -4x + (5-a)z = 0 \end{array}\right\}$$

(Univ. de Alicante)

$$M = \begin{bmatrix} 4-a & -5 & 7 \\ 1 & -4-a & 9 \\ -4 & 0 & 5-a \end{bmatrix} \; ; \quad |M| = (4-a)(-4-a)(5-a) + 180 + 28(-4-a) + 5(5-a) = -a^3 + 5a^2 - 17a + 13$$

$$|M| = 0 \Rightarrow a^3 - 5a^2 + 17a - 13 = 0 \qquad (1)$$

Como la suma de los coeficientes de la ecuación (1) es igual a cero, 1 es raíz. Rebajando de grado por Rufini:

	1	−5	17	−13
1		1	−4	13
	1	−4	13	0

$$a^2 - 4a + 13 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} \quad \text{(raices imaginarias)}$$

Sólo el valor real $a = 1$ anula a $|M|$, de donde:

$\boxed{\text{para } a \neq 1, \text{ rango } M = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{sólo tiene la solución } x = y = z = 0}$

Si $\underline{a = 1}$:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de M es 2.

$\boxed{\text{para } a = 1, \text{ rango } M = 2 < \text{número de incognitas} \Rightarrow \text{el sistema tiene infinitas soluciones}}$

Para resolverlo tomaremos como ecuaciones e incógnitas principales las correspondientes al menor $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de M, o sea las ecuaciones segunda y tercera y las incógnitas x e y. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{rl} x - 5y & = -9z \\ -4x & = -4z \end{array}\right| \Rightarrow \quad x = z \; ; \; y = 2z \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{array}}$$

5.16 **Discutir y resolver:**

$$\left.\begin{array}{rl} x + ay + 2z & = 0 \\ (a-1)x + a^2y + az & = 0 \\ 2x + a(a+2)y + (a+4)z & = 0 \end{array}\right|$$

(Univ. de Madrid)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ a-1 & a^2 & a \\ 2 & a(a+2) & a+4 \end{bmatrix} \; ; \quad |M| = a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a-1 & a & a \\ 2 & a+2 & a+4 \end{bmatrix}$$

restando a la segunda columna la primera, y a la tercera la primera multiplicada por 2:

$$|M| = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 2-a \\ 2 & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 2-a \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2(a-1)$$

Para $a \notin \{0, 1\}$, rango $M = 3$, igual al número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial: $x = y = z = 0$

Si $\underline{a = 0}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de M es 2

Para $a = 0$, rango $M = 2$, menor que el número de incógnitas $\Rightarrow$ tiene infinitas soluciones

Para resolver el sistema se toman como ecuaciones principales la primera y la segunda, que se corresponden con las filas del menor que nos ha dado el rango, y como incógnitas principales se toman la x y la z, que se corresponden con las columnas del menor. El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2z & = 0 \cdot y \\ -x & = 0 \cdot y \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{array}}$$

para cada valor de t tenemos una solución.

Si $\underline{a = 1}$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de M es 2.

Para $a = 1$, rango $M = 2$, menor que el número de incógnitas $\Rightarrow$ tiene infinitas soluciones

Por el mismo razonamiento anterior se obtiene que el sistema es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -2z \\ y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y - 2z = z - 2z = -z \\ y = -z \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{array}}$$

5.17 **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado:**

$$\begin{bmatrix} -7-a & 6 & 6 \\ -3 & 2-a & 3 \\ -6 & 6 & 5-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Por las propiedades del producto e igualdad de matrices el sistema lo podemos escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{rl} (-7-a)\,x + 6y + 6z &= 0 \\ -3x + (2-a)\,y + 3z &= 0 \\ -6x + 6y + (5-a)\,z &= 0 \end{array}\right|$$

La matriz de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} -7-a & 6 & 6 \\ -3 & 2-a & 3 \\ -6 & 6 & 5-a \end{bmatrix}$$

es cuadrada. El sistema tendrá solución distinta de la trivial para los valores de a que anulen el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -7-a & 6 & 6 \\ -3 & 2-a & 3 \\ -6 & 6 & 5-a \end{vmatrix} = (-7-a)(2-a)(5-a) - 108 - 108 + 36(2-a) - 18(-7-a) + 18(5-a) =$$

$$= -a^3 + 3a + 2\,; \qquad |A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a - 2 = 0$$

Como es una ecuación de tercer grado, se prueban, por Rufini, los divisores del término independiente para ver si tiene raíces enteras. Los divisores de -2 son: $1, -1, 2$ y -2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -4 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raiz, siendo las otras raices las so}$$

luciones de la ecuación $a^2 - a - 2 = 0$: $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Si $a \in \{-1, 2\}$, el determinante de A será nulo, el rango de A será menor que 3 (número de incógnitas) y el sistema tendrá infinitas soluciones.

Si $\underline{a = 2}$, el sistema sera:
$$\left.\begin{array}{l} -9x + 6y + 6z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ -6x + 6y + 3z = 0 \end{array}\right|$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -9 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, el rango de A es 2. Considerando el menor que nos ha dado el rango, el sistema es equivalente al sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -9x + 6y = -6z \\ -3x = -3z \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 6y = -6z + 9x = -6z + 9z = 3z\ ;\quad y = \dfrac{1}{2}z \\ x = z \end{array}$$

haciendo $z = 2k$ obtenemos la solución general: $\boxed{x = 2k,\quad y = k,\quad z = 2k}$

Si $\underline{a = -1}$, el sistema será:
$$\left.\begin{array}{l} -6x + 6y + 6z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ -6x + 6y + 6z = 0 \end{array}\right|$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

como la primera y la tercera filas son proporcionales a la segunda:

$r(A) =$ rango de $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1$, siendo $|-3| \neq 0$ un menor principal.

El sistema es equivalente a: $-3x + 3y + 3z = 0 \Rightarrow x = y + z$

haciendo $y = k$ y $z = h$, la solución general es: $\boxed{x = k + h\ ;\quad y = k\ ;\quad z = h}$

5.18 **Consideremos los sistemas de ecuaciones lineales:**

$$S \equiv \begin{cases} 2x + y - (3 + 2a)z = 0 \\ x - y + (3 - a)z = 0 \end{cases} \qquad S' \equiv \begin{cases} x + (1 + b)z = 0 \\ (b-1)x + y + b(b-1)z = 0 \end{cases}$$

Obtener los conjuntos de soluciones de ambos sistema y calcular los valores de a y b que hacen que los sistemas sean equivalentes, es decir, con las mismas soluciones.

(Univ. de Valencia)
(Univ. de Málaga, 1991)

Matriz de los coeficientes de S: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3-2a \\ 1 & -1 & 3-a \end{bmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el sistema S se puede escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2x+y=(3+2a)z \\ (2) & x-y=(a-3)z \end{array}\right| \quad \begin{array}{ll} (1')=(1)+(2) & 3x \quad = 3az \\ (2) & x-y=(a-3)z \end{array}\Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x = az \\ \qquad y = 3z \end{array}$$

haciendo $z = k$: $\boxed{x = ak \quad ; \quad y = 3k \quad ; \quad z = k}$ (1)

Matriz de los coeficientes de S': $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+b \\ b-1 & 1 & b^2-b \end{bmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el sistema S' se puede escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad = -(1+b)z \\ (b-1)x+y=(-b^2+b)z \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x=(-1-b)z \\ \qquad y=(b-1)z \end{array}$$

haciendo $z = h$: $\boxed{x = (-1-b)h \quad ; \quad y = (b-1)h \quad ; \quad z = h}$ (2)

Si los sistemas S y S' tienen las mismas soluciones, de (1) y (2) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} ak = (-1-b)h \\ 3k = (b-1)h \\ k = h \end{array}\right| \Rightarrow \frac{k}{h} = \frac{-1-b}{a} = \frac{b-1}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1-b=a \\ b-1=3 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{b=4,\ a=-5}$$

Se pueden calcular los valores de a y b considerando que el sistema formado por las ecuaciones de S y S' tiene solución distinta de la trivial, o sea que el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3-2a \\ 1 & -1 & 3-a \\ 1 & 0 & 1+b \\ b-1 & 1 & b^2-b \end{bmatrix} < 3.$$

como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, orlando este menor con la tercera columna y las filas primera y cuarta, obtenemos dos menores de tercer orden que deben ser nulos:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3-2a \\ 1 & -1 & 3-a \\ 1 & 0 & 1+b \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3-a \\ 1 & 0 & 1+b \\ b-1 & 1 & b^2-b \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2(1+b)+(3-a)+(-3-2a)-(1+b)=0 \\ \\ -(1+b)(b-1)+(3-a)-(1+b)+(b^2-b)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3-3b-3a=0 \\ \\ 3-a-2b=0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ a + 2b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -5} \ , \quad \boxed{b = 4}$$

5.19 **Discutir el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m-2 \\ 3x + my + z = m-2 \end{array}\right\}$$

según los valores de $m \in R$, y resolverlo para aquellos valores en que exista solución.

(Univ. de Córdoba)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 2m^2 - 6 + m - m = 2m^2 - 8 \ ; \quad |A| = 0 \Rightarrow 2m^2 - 8 = 0 \ ; \quad m^2 = 4 \ ; \quad m = \pm 2$$

$$\boxed{\text{si } m \notin \{-2, 2\}: \left.\begin{array}{l} \text{rango de } A = 3 \\ \text{rango de } B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO} \\ \text{(solución única)}\end{array}}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 1 & -1 \\ m-2 & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-(m-2) + 2m(m-2) - 2(m-2) - (m-2)}{2(m^2-4)} = \frac{2(m-2)^2}{2(m+2)(m-2)} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m-2}{m+2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ m & m-2 & -1 \\ 3 & m-2 & 1 \end{vmatrix}}{2(m^2-4)} = \frac{(m-2) + 2m(m-2) - 6(m-2) + (m-2)}{2(m^2-4)} = \frac{2(m-2)^2}{2(m+2)(m-2)} \Rightarrow \boxed{y = \frac{m-2}{m+2}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & m-2 \\ 3 & m & m-2 \end{vmatrix}}{2(m^2-4)} = \frac{(m-2) + 3(m-2) - m(m-2) - m(m-2)}{2(m^2-4)} = \frac{-2(m-2)^2}{2(m+2)(m-2)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{-(m-2)}{m+2}}$$

Si $\underline{m = -2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, el rango de A es 2.

Orlando, en B, este menor con la tercera fila y la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 12 - 8 - 8 \neq 0 \text{ , el rango de B es 3.}$$

si $m = -2$: rango de A = 2, rango de B = 3	$\Rightarrow$	SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

Si $\underline{m = 2}$: El sistema que nos queda es homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right|$$

y sólo hay que estudiar la matriz A de los coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de A es 2, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial, tiene ifinitas soluciones.

si $m = 2$: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infintas soluciones)

Para resolverlo se consideran como incógnitas principales x e y (cuyos coeficientes se corresponden con las columnas del menor que nos ha dado el rango), y como ecuaciones principales la primera y segunda (cuyos coeficientes se corresponden con las filas del menor que nos ha dado el rango). Es sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -2z \\ 2x + y &= z \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} y &= -2z - x = -2z - 3z = -5z \\ x &= 3z \end{aligned}$$

haciendo $z = k$ tenemos la solución general: $\boxed{x = 3k \ , \quad y = -5k \ , \quad z = k}$

5.20 **Discutir y resolver, en los casos que proceda, el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} 2y + kz &= k \\ (k-2)x + y + 3z &= 0 \\ (k-1)y &= 1 - k \end{aligned}\right|$$

¿Cómo sería la discusión si los términos independientes fuesen nulos?

(Univ. de La Laguna – Tenerife)
(Univ. de Extremadura)

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & k \\ k-2 & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & k & k \\ k-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & k \\ k-2 & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 0 \end{vmatrix} = -(k-2)\begin{vmatrix} 2 & k \\ k-1 & 0 \end{vmatrix} = (k-2)(k-1)k \; ; \quad |A| = 0 \Leftrightarrow (k=0,\, k=1,\, k=2)$$

si $k \notin \{0, 1, 2\}$:	rango de $A = 3$ rango de $B = 3$	$\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

$$\left.\begin{aligned} 2y + kz &= k \\ (k-2)x + \quad y + 3z &= 0 \\ (k-1)y \quad &= 1-k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{y = -1} \quad \boxed{z = \frac{k+2}{k}} \quad \boxed{x = \frac{-6-2k}{(k-2)k}}$$

Si $\underline{k = 0}$:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el rango de A es 2.

Orlando este menor con la tercera fila y la cuarta columna de B:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ el rango de } B \text{ es } 3.$$

si $k = 0$:	rango de $A = 2$ rango de $B = 3$	$\Rightarrow$	SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

Si $\underline{k = 1}$:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de A es 2. El rango de B también es 2, ya que no se pueden formar menores de tercer orden distintos de 0, al ser nulos los elementos de la tercera fila.

si $k = 1$: rango A = rango $B = 2$ $\Rightarrow$	SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Para resolverlo se toman como incógnitas principales x e y, cuyos coeficientes son las columnas del menor que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} -2y &= 1 - z \\ -x + y &= -3z \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{z-1}{2} \qquad x = y + 3z = \frac{z-1}{2} + 3z = \frac{7z-1}{2}$$

haciendo $z = 2k$: $\boxed{x = 7k - \frac{1}{2} \; ; \; y = k - \frac{1}{2} \; ; \; z = 2k}$

Si $\underline{k = 2}$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rango de A es 2.

Orlando, en B, este menor con la primera fila y la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0, \text{ el rango de } B \text{ es } 3.$$

$$\boxed{\text{si } k = 2: \left.\begin{aligned} &\text{rango de } A = 2 \\ &\text{rango de } B = 3 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)}}$$

Si los términos independientes fuesen nulos, el sistema sería:

$$\left.\begin{aligned} 2y + kz &= 0 \\ (k-2)x + \quad y + 3z &= 0 \\ (k-1)y \quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es homogéneo. Sólo habría que estudiar el rango de la matriz de los coeficientes, o sea de A, que como hemos visto:

si $k \notin \{0, 1, 2\}$: rango de $A = 3 =$ número de incógnitas	$\Rightarrow$	el sistema sólo tiene la solución: $x = y = z = 0$
si $k \in \{0, 1, 2\}$: rango de $A = 2 <$ número de incógnitas	$\Rightarrow$	el sistema tiene infinitas soluciones.

5.21 Eliminar los parámetros a y b en el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= 4a + b \\ y - 2 &= 3a - b \\ z &= -a + 2b \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Valencia)

El sistema dado es compatible puesto que el rango de matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+4a+b \\ 0 & 1 & 0 & 2+3a-b \\ 0 & 0 & 1 & -a+2b \end{bmatrix}$$

es 3. Siendo la solución: $x = 1+4a+b$; $y = 2+3a-b$; $z = -a+2b$, que depende de los valores de a y b.

De lo anterior se deduce que el sistema, en que las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+b = x-1 \\ 3a-b = y-2 \\ -a+2b = z \end{array}\right\}$$

es compatible, de donde:

$$\text{rango de } \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango } \begin{bmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 3 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{bmatrix}$$

El rango de la primera matriz es 2, puesto que $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, luego el rango de la segunda matriz debe ser 2 para que el sistema sea compatible, el único menor de tercer orden debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 3 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4z-(y-2)+6(x-1)-(x-1)-3z-8(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{5x-9y-7z+13 = 0}$$

5.22 Eliminar los parámetros a, b y c, en el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2a+b+c-1 \\ x_2 = -a-2b+c+2 \\ x_3 = a+3b-2c-5 \\ x_4 = 4a-2b+6c+4 \end{array}\right\}$$

(Univ. de Murcia)

A cada valor real de a, b y c corresponden valores reales de x_1, x_2, x_3 y x_4. Esto nos dice que el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b+c = x_1+1 \\ -a-2b+c = x_2-2 \\ a+3b-2c = x_3+5 \\ 4a-2b+6c = x_4-4 \end{array}\right\}$$

en donde las incógnitas son a, b y c, tiene solución, es compatible, de donde:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & x_1+1 \\ -1 & -2 & 1 & x_2-2 \\ 1 & 3 & -2 & x_3+5 \\ 4 & -2 & 6 & x_4-4 \end{bmatrix}$$

Hallemos el rango de la primera matriz:

Orlando el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$, con la tercera columna y las filas tercera y cuarta:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8+1-3+2-6-2=0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -24+4+2+8+4+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el rango de la primera matriz es } 2.$$

Al ser también 2 el rango de la segunda matriz, los menores de tercer orden que resultan de orlar el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$, que nos ha determinado el rango de la primera matriz, con la cuarta columna y las filas tercera y cuarta, de la segunda matriz, deben ser nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x_1+1 \\ -1 & -2 & x_2-2 \\ 1 & 3 & x_3+5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x_1+1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (x_2-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (x_3+5)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1+5x_2+3x_3=-6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x_1+1 \\ -1 & -2 & x_2-2 \\ 4 & -2 & x_4-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x_1+1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (x_2-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (x_4-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$10x_1+8x_2-3x_4=-6$$

Al eliminar los parámetros a, b y c resulta el sistema:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} x_1+5x_2+3x_3=-6 \\ 10x_1+8x_2-3x_3=-6 \end{array}\right\}}$$

5.23 **Determinar los valores del parámetro t para que el sistema**

$$\left.\begin{array}{r} t^2x+t^3y+tz=1 \\ x+t^2y+z=0 \end{array}\right\}$$

tenga solución.

(Univ. de Cantabria, 1991)

$$A=\begin{bmatrix} t^2 & t^3 & t \\ 1 & t^2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix} t^2 & t^3 & t & 1 \\ 1 & t^2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tendrá solución para los valores de t que hagan que $r(A) = r(B)$.

Orlando, en A, el menor $|1|$ con la segunda y tercera columna obtenemos los dos siguientes menores de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ \underline{1} & t^2 \end{vmatrix} = t^4 - t^3 = t^3(t-1) \quad ; \qquad \begin{vmatrix} t^2 & t \\ \underline{1} & 1 \end{vmatrix} = t^2 - t = t(t-1)$$

que se anulan simultáneamente para $t = 0$ y $t = 1$. Para estos valores de t el rango de A es 1, y para otros valores de t el rango de A es 2, así como el rango de B, puesto que B sólo tiene dos filas y cualquier menor de orden dos de A, no nulo, es menor de B.

Para $t = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

el rango de A es 1, y el tango de B es 2, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Para $t = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

el rango de A es 1, y el rango de B es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

De todo lo anterior se deduce:

si $t \notin \{0, 1\}$: $r(A) = r(B) = 2$	$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)
si $t \in \{0, 1\}$: $\begin{cases} r(A) = 1 \\ r(B) = 2 \end{cases}$	$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)

5.24 **Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, compatible determinado. Supongamos que a S le quitamos una ecuación y nos queda así un sistema S' con $m-1$ ecuaciones y n incógnitas. Contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:**

1) ¿Puede S' ser incompatible?
2) ¿Puede ocurrir $m < n$?
3) Si $m = n$, ¿es S' determinado o indeterminado?
4) Si $m > n$, ¿es S' determinado o indeterminado?

(Univ. de Valencia, 1991)

1) Sea A la matriz de los coeficientes del sistema S y B la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el sistema S es compatible determinado existe solución única: $x_1 = a_1$, $x_2, \dots, x_n = a_n$. La última columna de B es igual a la suma de las columnas primera, segunda, ..., n–ésima, multiplicadas respectivamente por $a_1, a_2, \dots, a_n$, o sea, la última columna de B es combinación lineal de las anteriores.

Si A' es la matriz de los coeficientes de S' y B' la matriz ampliada, como A' y B' se obtienen de A y B suprimiendo una fila, la última columna de B' es combinación lineal de las anteriores. En el cálculo del rango de B' se puede suprimir la última columna por ser combinación lineal de las anteriores y nos quedará una matriz, que coincide con A', que tiene el mismo rango que B'. Si A' y B' tienen el mismo rango el sistema S' es compatible.

El sistema S' no puede ser incompatible.

2) Si el sistema S es compatible determinado:

$$\text{rango de } A = \text{rango de } B = \text{número de incógnitas} = n$$

Tanto la matriz A como la B tienen m filas, no podrá ser el rango de ambas matrices igual a n si $m < n$, pues en este caso no tendríamos ningún menor de orden n.

No puede ser $m < n$.

3) Si $m = n$, el sistema S' tendrá $(n - 1)$ ecuaciones. En el apartado 1) hemos visto que el sistema S' es compatible, pero como A' y B' tienen $(n-1)$ filas, el rango será como máximo $(n-1)$, menor que el número de incógnitas. El sistema S' es compatible indeterminado.

Si $m = n$, el sistema S' es compatible indeterminado.

4) El sistema S' es compatible según se demostró en 1). Si la ecuación que se suprime de S no pertenece a las n ecuaciones cuyos coeficientes forman el menor que nos ha dado el rango de A y B, se verificará: rango de A' = rango de $B' = n$, el sistema S' es compatible determinado. Si la ecuación que se suprime de S pertenece a las n ecuaciones cuyos coeficientes forman el menor que nos ha dado el rango de A y de B, podrá ocurrir que todas las $(m - n)$ ecuaciones restantes de S sean o no combinación lineal de las $(n - 1)$ ecuaciones que quedan después de suprimir una de las que nos ha dado el rango de A y B, en el primer caso: rango de A' = rango de $B' = n - 1$, el sistema S' es compatible indeterminado; en el segundo caso: rango de A' = rango de $B' = n$, el sistema es compatible determinado.

Si $m > n$, depende de la ecuación eliminada de S el que sea S' compatible determinado o indeterminado.

CAPITULO 6

ESPACIO AFIN TRIDIMENSIONAL

ESPACIO AFIN

Sea **E** el conjunto de puntos del espacio ordinario y **V** el espacio vectorial real de los vectores libres de dicho espacio ordinario.

La aplicación **f** de $E \times E$ en **V**, tal que a cada par de puntos $(A, B) \in E \times E$ le hace corresponder un vector geométrico de origen A y extremo B, es decir:

$$E \times E \xrightarrow{f} V$$

$$(A, B) \longmapsto v = f(A, B) = AB$$

cumple las siguientes condiciones:

a) Para todo punto A de **E** y todo vector **v** de **V**, existe un único punto B de **E** tal que

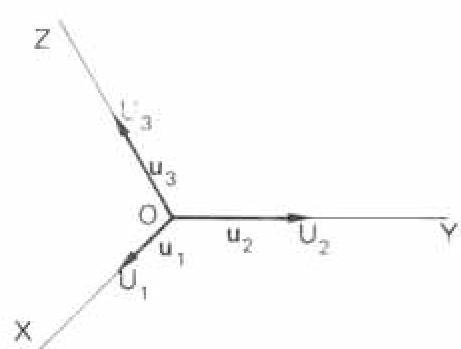
$$f(A,B) = AB = v.$$

b) Cualesquiera que sean los puntos A, B y C de **E**, se verifica que

$$f(A, B) + f(B, C) = f(A, C) \quad , \quad \text{o sea} \quad AB + BC = AC \qquad \text{(Relación de Chasles)}$$

Por cumplir f estas dos propiedades, se dice que **E** es un **espacio afín** asociado al espacio vectorial **V**.

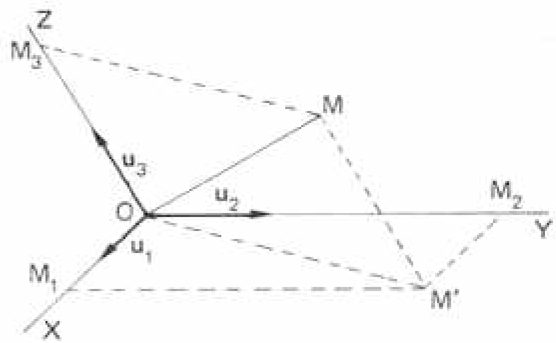
Se llama **sistema de referencia afín** del espacio afín **E** al conjunto $\{O, u_1, u_2, u_3\}$ siendo O un punto de **E** y u_1, u_2 y u_3 tres vectores libres, que forman una base de **V**, tales que OU_1, OU_2 y OU_3 son tres representantes.



Las rectas OX, OY y OZ que pasan por O y son paralelas, respectivamente, a los vectores u_1, u_2 y u_3, se llaman *ejes de coordenadas* del sistema de referencia $\{O, u_1, u_2, u_3\}$, y los planos XOY, YOZ y XOZ se llaman *planos coordenados*. El punto O es el *origen de coordenadas*.

Todo punto M del espacio determina el vector OM, llamado vector de posición de M respecto de O, tal que:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}' + \mathbf{M}'\mathbf{M} =$$
$$= \mathbf{OM}_1 + \mathbf{OM}_2 + \mathbf{OM}_3 =$$
$$= x \cdot \mathbf{u}_1 + y \cdot \mathbf{u}_2 + z \cdot \mathbf{u}_3 \qquad (1)$$



(x, y, z) son las *coordenadas* de M respecto del sistema de referencia $\{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

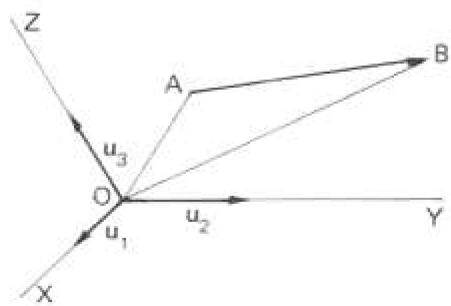
Recíprocamente, a toda terna de números reales (x, y, z) corresponde, respecto del sistema de referencia $\{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, un solo punto M tal que se verifique la relación (1).

En todo lo que sigue, mientras no se indique otra cosa, consideraremos referidos todos los puntos del espacio al sistema de referencia afín $R = \{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, podemos calcular las componentes del vector **AB** respecto de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$:

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} =$$
$$= (b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_3\mathbf{u}_3) - (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) =$$
$$= (b_1 - a_1)\mathbf{u}_1 + (b_2 - a_2)\mathbf{u}_2 + (b_3 - a_3)\mathbf{u}_3$$

escribiremos: $\boxed{\mathbf{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)}$



ECUACIONES DEL PLANO

Se llama ecuación de un plano a la condición necesaria y suficiente que deben verificar las coordenadas de todo punto del plano.

Un plano queda determinado dando un punto por el que pasa y dos vectores, de distinta dirección, a los que es paralelo.

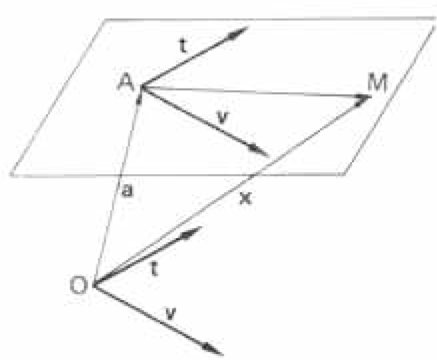
También queda determinado por tres puntos no situados en línea recta.

Ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, no paralelos entre sí.

Si **a** y **x** son los vectores de posición del punto A y del punto genérico $M(x, y, z)$ del plano:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{t}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(t_1, t_2, t_3)}$$



La ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ y $\mathbf{t} = (-2, 7, 8)$ es

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda(5, 4, -6) + \mu(-2, 7, 8)$$

Para cada par de valores reales que demos a los parámetros λ y μ obtendremos las componentes de un vector **x** cuyo representante con origen en el punto O, origen de coordenadas, tendrá su extremo en el plano.

Ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda v_1 + \mu t_1 \\ y &= y_1 + \lambda v_2 + \mu t_2 \\ z &= z_1 + \lambda v_3 + \mu t_3 \end{aligned}\right\}} \qquad (2)$$

Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ y $\mathbf{t} = (-2, 7, 8)$ son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 5\lambda - 2\mu \\ y &= -1 + 4\lambda + 7\mu \\ z &= 3 - 6\lambda + 8\mu \end{aligned}\right\}$$

Para cada par de valores reales que demos a los parámetros λ y μ obtendremos las coordenadas (x, y, z) de un punto del plano.

Ecuación cartesiana o implícita del plano que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0} \qquad (3)$$

Si desarrollamos este determinante y simplificamos, nos quedará una expresión lineal en x, y, z, de la forma:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \qquad (4)$$

en la que no son nulos simultáneamente a, b y c.

La ecuación cartesiana o implícita del plano que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ y $\mathbf{t} = (-2, 7, 8)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 5 & 4 & -6 \\ -2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-2)(32+42) - (y+1)(40-12) + (z-3)(35+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 74x - 28y + 43z - 305 = 0$$

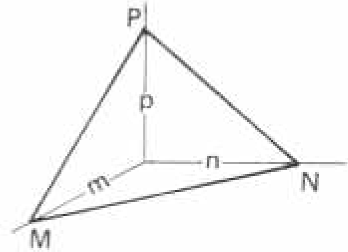
Las ecuaciones de los planos coordendos son:

plano XOY: $z = 0$
" XOZ: $y = 0$
" YOZ: $x = 0$

La ecuación $ax + by + d = 0$ representa un plano paralelo al eje OZ.
" " $ax + cz + d = 0$ " " " " " " OY.
" " $by + cz + d = 0$ " " " " " " OX.

El plano $ax + by + cz + d = 0$ es paralelo al vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ si y sólo si

$$\boxed{a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0}$$



Si el plano corta a los ejes en los puntos $M(m, 0, 0)$, $N(0, n, 0)$ y $P(0, 0, p)$, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1 = 0} \qquad (5)$$

llamada **ecuación secular.**

Ecuación del plano determinado por tres puntos, no situados en línea recta, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0} \qquad (6)$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(3, -1, 1)$ y $C(4, 0, -2)$, es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Restando la última fila de las tres primeras y desarrollando después por los elementos de la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z+2 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-4 & y & z+2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (x-4)(-3+4) - y(-9+4) + (z+2)(3-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x + 5y + 2z = 0$$

Considerando que el plano determinado por los tres puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$ es el plano que pasa por el punto A y es paralelo a los vectores

$$AB = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \qquad \text{y} \qquad AC = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1),$$

podemos hallar su ecuación por las fórmulas anteriores.

La condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $D(x_4, y_4, z_4)$ sean coplanarios es:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

Se llama **haz de planos** determinado por los planos

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ; \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

al conjunto de planos que contienen a la recta intersección de ambos. Su ecuación es:

$$\boxed{\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0} \qquad (7)$$

A cada par de valores reales de λ y μ obtendremos un plano del haz que contiene a la recta intersección de ambos planos, llamada *base* del haz.

Dos planos
$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d = 0$$

son *coincidentes* si

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

y son *paralelos* y distintos si

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

(si algún denominador es 0, se entenderá que también es 0 el numerados correspondiente).

Se llama **haz impropio de planos** al conjunto de todos los planos paralelos a uno dado.

El conjunto de todos los planos paralelos al plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

tiene por ecuación

$$\boxed{ax + by + cz + k = 0} \qquad (8)$$

A cada valor real de k corresponde un plano, perteneciente al haz impropio de planos definido por esta última ecuación.

El plano que pasa por el punto $A(3, -2, 1)$ y es paralelo al plano $6x + 4y + 8z - 7 = 0$, se obtiene de la siguiente forma:

- Todos los planos paralelos al dado están contenidos en la ecuación del haz de planos:

$$6x + 4y + 8z + k = 0 \qquad (a)$$

- El valor de k que nos da el plano que pasa por el punto $A(3, -2, 1)$ lo hallaremos considerando que los coordenadas de A deben satisfacer la ecuación (a):

$$6 \cdot 3 + 4(-2) + 8 \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow k = -18 \Rightarrow 6x + 4y + 8z - 18 = 0$$

es la ecuación del plano pedido.

Se llama **radiación de planos** al conjunto de todos los planos que pasan por un punto llamado *vértice* de la radiación.

La ecuación de la radiación de planos que tiene por vértice el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ es:

$$\boxed{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0} \qquad (9)$$

siendo a, b, c, parámetros variables.

Todos los planos que pasan por el punto $A(3, 2, -4)$ están comprendidos en la ecuación:

$$a(x - 3) + b(y - 2) + c(z + 4) = 0$$

Si los tres planos

$$ax + by + cz + d = 0 \;;\; a'x + b'y + c'z + d' = 0 \;;\; a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

forman un ángulo triedro (tienen un solo punto común), la ecuación de la radiación de planos a que pertenecen es:

$$\boxed{\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') + \gamma(a''x + b''y + c''z + d'') = 0} \qquad (10)$$

siendo λ, μ, γ parámetros variables.

Todos los planos que pasan por el punto de intersección de los planos:

$$2x - 3y - 4z - 8 = 0, \quad 2x - 4y + 5z - 4 = 0, \quad 4x - 6y - 3z - 5 = 0$$

están comprendidos en la ecuación:

$$\lambda(2x - 3y - 4z - 8) + \mu(2x - 4y + 5z - 4) + \gamma(4x - 6y - 3z - 5) = 0$$

Posición relativa de dos planos: En el estudio de la posición relativa de los planos

$$\pi_1: \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi_2: \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

se podrán presentar los siguientes casos:

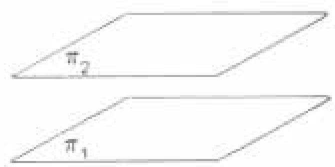
1º) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'} \Rightarrow$ los dos planos son coincidentes.

Las igualdades anteriores equivalen a: $(a, b, c, d) = k(a', b', c', d')$

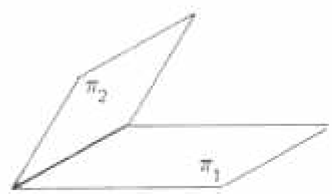
2º) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{d}{d'} \Rightarrow$ los planos son paralelos y distintos

Las igualdades anteriores equivalen a:

$(a, b, c) = k(a', b', c')$, $\quad d \neq k d'$



3º) Si no se verifica ninguno de los dos casos anteriores, los dos planos se cortan según una recta.



A la misma conclusión se llega estudiando, por el teorema de Rouché, el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}$$

$r(M) = r(N) = 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'} \Rightarrow$ los dos planos son coincidentes

$\left.\begin{matrix} r(M) = 1 \\ r(N) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE $\Rightarrow$ los dos planos son distintos y paralelos

$r(M) = r(N) = 2 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO $\Rightarrow$ los dos planos son distintos y se cortan

Sea estudiar, según los valores de a y b, la posición relativa de los planos π_1: $2x + ay - 4z - 8 = 0$ y π_2: $4x + 6y - 8z + b = 0$:

Los planos serán paralelos si: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{a}{6} = \dfrac{-4}{-8} \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow a = 3$

Los planos serán coincidentes si: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{-8}{b} \Rightarrow 2b = -32 \Rightarrow b = -16$

Si $\underline{a = 3 \text{ y } b = -16}$: los planos coinciden

" $\underline{a = 3 \text{ y } b \neq -16}$: los planos son paralelos y distintos

" $a \neq 3$: los planos no son paralelos, se cortan según una recta.

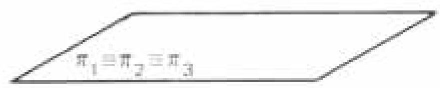
Posición relativa de tres planos: Sean los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi_2: \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$\pi_3: \quad a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

Se estudia en primer lugar si hay planos paralelos:

- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ y $\dfrac{a}{a''} = \dfrac{b}{b''} = \dfrac{c}{c''} = \dfrac{d}{d''}$

  los tres planos son coincidentes



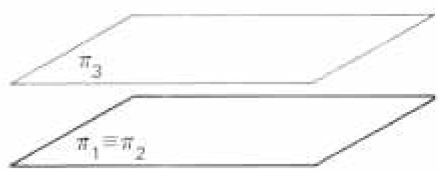
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{d}{d'}$ y $\dfrac{a}{a''} = \dfrac{b}{b''} = \dfrac{c}{c''} \neq \dfrac{d}{d''}$

  y $\dfrac{a'}{a''} = \dfrac{b'}{b''} = \dfrac{c'}{c''} \neq \dfrac{d'}{d''}$

  los tres planos son paralelos y distintos

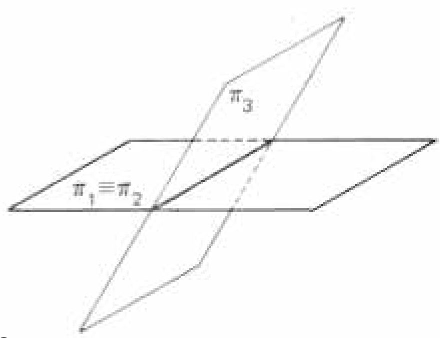
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ y $\dfrac{a}{a''} = \dfrac{b}{b''} = \dfrac{c}{c''} \neq \dfrac{d}{d''}$

  los dos primeros planos son coincidentes y paralelos al tercero



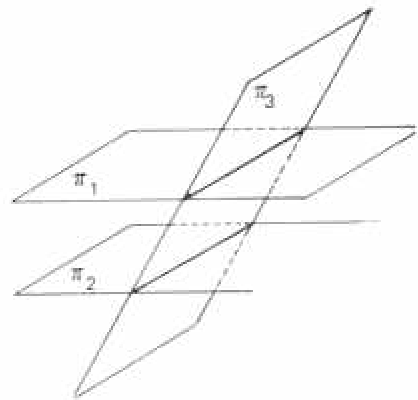
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ y $(a, b, c) \neq k(a'', b'', c'')$

los dos primeros planos son coincidentes y cortados por el tercero



- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{d}{d'}$ y $(a, b, c) \neq k(a'', b'', c'')$

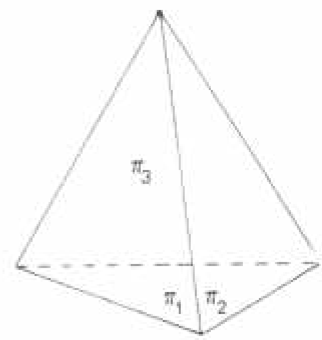
  los dos primeros planos son paralelos y distintos y están cortados por el tercero



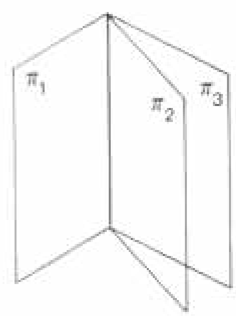
Si no existe ningún par de planos paralelos, se estudia por Rouché el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b'' & c'' \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{bmatrix}$$

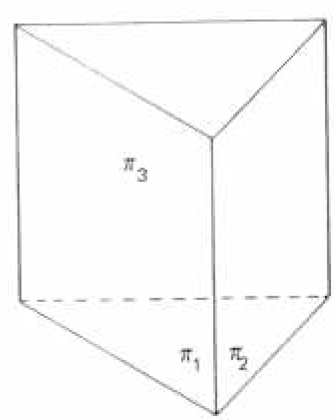
$r(M) = r(N) = 3 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO
los tres planos se cortan en un punto, forman un triedro



$r(M) = r(N) = 2 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
los tres planos se cotan en una recta común



$\left.\begin{array}{l} r(M) = 2 \\ r(N) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE
los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, forman una superficie prismática



Sea estudiar, según los valores de a, b, c y d, la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: \quad x + y + z = a$$
$$\pi_2: \quad x + y + z = b$$
$$\pi_3: \quad x + y + cz = d$$

Los dos primeros planos son paralelos, y si $c = 1$ los tres planos serán paralelos.

$c = 1$:
- $a = b = c \Rightarrow$ los tres planos son coincidentes
- $a = b \neq d \Rightarrow$ los dos primeros planos coinciden y son paralelos al tercero
- $a \neq b = d \Rightarrow$ los dos últimos planos coinciden y son paralelos al primero
- $a = d \neq b \Rightarrow$ los planos primero y tercero coinciden y son paralelos al segundo
- $a \neq b,\ b \neq d,\ a \neq d \Rightarrow$ los tres planos son paralelos y distintos

$c \neq 1$:
- $a = b$ los dos primeros planos coinciden y son cortado por el tercero
- $a \neq b$ los dos primeros planos son paralelos y distintos y son cortados por el tercero.

Decir en qué posición relativa están los tres planos dados por:

$$2x + 3y - 4z = 2a - 33$$
$$x + ay + 3z = 0$$
$$3x + ay - 2z = 0$$

según los valores del parámetro "a".

(Univ. de Navarra, 1991)

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-4}{3} \Rightarrow$ los dos primeros planos no son paralelos

$\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-4}{-2} \Rightarrow$ los planos primero y tercero no son paralelos

$\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{3}{-2} \Rightarrow$ los planos segundo y tercero no son paralelos

Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & a & 3 \\ 3 & a & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 2a-33 \\ 1 & a & 3 & 0 \\ 3 & a & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$|M| = -4a + 27 - 4a + 12a - 6a + 6 = -2a + 33$; $|M| = 0 \Rightarrow -2a + 33 = 0$; $a = \dfrac{33}{2}$

Si $a \neq \dfrac{33}{2}$: $r(M) = r(N) = 3 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO, los tres planos se cortan en un punto

Si $a = \dfrac{33}{2}$: $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de M es 2.

Como para este valor de a la cuarta columna de N está formada por ceros, el rango de N es también igual a 2.

$r(M) = r(M) = 2 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, los tres planos se cortan en una recta común.

Estudiar la posición relativa, en el espacio, de los tres planos:

$$\pi_1: \quad 3x - y + 2z - 1 = 0$$
$$\pi_2: \quad 2x + 6y + 3 = 0$$
$$\pi_3: \quad 4x - 8y + 4z + 7 = 0$$

(Univ. de Murcia, 1991)

$\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{6} \Rightarrow$ los dos primeros planos no son paralelos

$\frac{3}{4} \neq \frac{-1}{-8} \Rightarrow$ los planos primero y tercero no son paralelos

$\frac{2}{4} \neq \frac{6}{-8} \Rightarrow$ los planos segundo y tercero no son paralelos

Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & -8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de } M \text{ es } 2$$

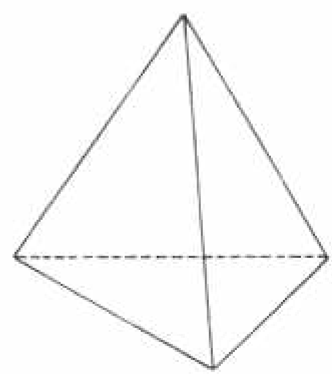
Orlando en N el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ con la última fila y la última columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = -2\,(54 + 18) \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de } N \text{ es } 3$$

El sistema es incompatible y no hay ningún par de planos paralelos, los planos se cortan dos a dos en rectas paralelas, forman una superficie prismática.

Condición para que cuatro planos formen un tetraedro. Los planos

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + d &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' &= 0 \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z + d'' &= 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' &= 0 \end{aligned}$$



formarán un tetraedro si

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \neq 0$$

y los menores de tercer orden de la matriz de los coeficientes son todos distintos de cero.

Veamos si forman un tetraedro los planos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z - 12 &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-12) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Orlando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ con la tercera columna y las filas primera y cuarta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

todos los menores de tercer orden formados por las tres primeras columnas son distintos de cero.

Los planos dados forman un tetraedro.

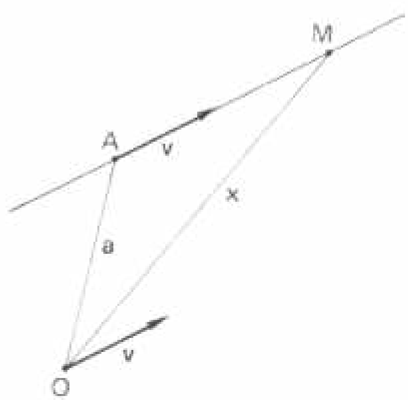
ECUACIONES DE LA RECTA

Se llaman ecuaciones de una recta a las condiciones necesarias y suficientes que deben verificar las coordenadas de todo punto de la recta.

Una recta queda determinada dando un punto por el que pasa y un vector, no nulo, al que es paralelo.

También queda determinada por dos de sus puntos, o bien por dos planos, no paralelos, que se cortan según la recta.

Ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Si **a** y **x** son los vectores de posición del punto A y del punto genérico $M(x, y, z)$ de la recta:

$$OM = OA + AM \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (v_1, v_2, v_3)} \qquad (11)$$

El vector **v**, paralelo a la recta, es el *vector director* de la recta, o *vector de dirección* de la recta.

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ es:

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda (5, 4, -6).$$

Para cada valor real que demos al parámetro λ obtendremos las componentes de un vector **x** cuyo representante con origen en el punto O, origen de coordenadas, tendrá su extremo en la recta.

La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto A y es paralela al vector $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)} \qquad (12)$$

La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(1, 3, 5)$ y $B(5, 6, 7)$ es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(1, 3, 5)$ y esparalela al vector $AB = (5-1, 6-3, 7-5) = (4, 3, 2)$:

$$(x, y, z) = (1, 3, 5) + \lambda (4, 3, 2)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda v_1 \\ y &= y_1 + \lambda v_2 \\ z &= z_1 + \lambda v_3 \end{aligned}\right\}} \qquad (13)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ son

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 5\lambda \\ y &= -1 + 4\lambda \\ z &= 3 - 6\lambda \end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned}\right\}} \qquad (14)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(1, 4, -2)$ y $B(3, 2, 3)$ son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \lambda(3-1) \\ y &= 4 + \lambda(2-4) \\ z &= -2 + \lambda(3+2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 4 - 2\lambda \\ z &= -2 + 5\lambda \end{aligned}\right\}$$

Ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}} \qquad (15)$$

(Si algún denominador es nulo, se considera nulo el numerador correspondiente).

La ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (5, 4, -6)$ es:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-6}$$

Ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad (16)$$

La ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1, 4, -2)$ y $B(3, 2, 3)$ es:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{2-4} = \frac{z+2}{3+2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{5}$$

Dada la ecuación continua de una recta se obtienen las ecuaciones paramétricas igualando la ecuación continua a λ y despejando x, y, z en función de λ. Igualando el valor de λ obtenido de las tres ecuaciones paramétricas obtenemos la ecuación continua.

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = \lambda \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= x_1 + m\lambda \\ y &= y_1 + n\lambda \\ z &= z_1 + p\lambda \end{aligned}\right.$$

La ecuación (15) es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Es muy importante considerar que los coeficientes de x, y, z es la unidad positiva. Si nos dan una ecuación parecida a la (15), antes de sacar conclusiones hemos de cerciorarnos de que los coefientes de x, y, z es la unidad positiva, y de no ser así, transformarla para que se cumpla dicha propiedad.

Dada la recta de ecuación

$$\frac{x-3}{5} = \frac{3y-6}{9} = \frac{-2z-4}{8}$$

para hallar un punto de ella y un vector paralelo, la transformaremos del siguiente modo: Se divide el numerador y el denominador de la segunda fracción por 3, y por -2 el numerador y denominador de la tercera fracción. La ecuación continua de la recta dada es:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{-4}$$

Esta recta pasa por el punto $A(3, 2, -2)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (5, 3, -4)$.

Ecuaciones implícitas o cartesianas de una recta. La intersección de dos planos no paralelos es una recta:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}\right\}} \qquad (17)$$

Dadas las ecuaciones implícitas de una recta, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta, escribiendo el sistema (17) de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = -cz - d \\ a'x + b'y = -c'z - d' \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -cz-d & b \\ -c'z-d' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = x_1 + kz \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -cz-d \\ a' & -c'z-d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = y_1 + hz$$

y haciendo $z = \lambda$, la solución general de (17) será:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda k \\ y = y_1 + \lambda h \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta (17).

Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$, se partiría del menor $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ o $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ que no sea nulo.

Si dada la recta

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 5z - 21 = 0 \\ x + y - z - 8 = 0 \end{array}\right\}$$

nos piden un punto de ella y un vector paralelo a dicha recta, hallaremos sus ecuaciones paramétricas:

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5z + 21 \\ x + y = z + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 - 2z \; ; \qquad y = 5 + 3z$$

haciendo $z = \lambda$, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 2\lambda \\ y &= 5 + 3\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right|$$

La recta pasa por el punto $A(3, 5, 0)$ y es paralela al vector $v = (-2, 3, 1)$.

Se llama **radiación de rectas** de vértice el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ al conjunto de todas las rectas del espacio que pasan por el punto A. Su ecuación es

$$\boxed{\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}} \qquad (18)$$

siendo m, n, p parámetros variables.

La ecuación de la radiación de rectas de vértice el punto $A(2, -1, 3)$ es:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{n} = \frac{z-3}{p}$$

Se llama **radiación impropia de rectas** al conjunto de todas las rectas del espacio que son paralelas a una recta dada.

La ecuación de la radiación impropia de rectas determinado por la recta

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

es

$$\boxed{\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{x - c}{p}} \qquad (19)$$

en donde m, n, p son fijos y a, b, c son parámetros variables.

El conjunto de todas las rectas paralelas a la recta

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{x+8}{-2}$$

están comprendidas en la radiación impropia de rectas de ecuación

$$\frac{x-a}{4} = \frac{y-b}{3} = \frac{z-c}{-2}$$

Condición de paralelismo entre rectas:

Las rectas:

$$r_1: \left|\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda v_1 \\ y &= y_1 + \lambda v_2 \\ z &= z_1 + \lambda v_3 \end{aligned}\right. \quad ; \quad r_2: \left|\begin{aligned} x &= x_2 + \mu t_1 \\ y &= y_2 + \mu t_2 \\ z &= z_2 + \mu t_3 \end{aligned}\right.$$

son paralelas si y solo si

$$\boxed{\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_3}{t_3}} \qquad (20)$$

Las rectas

$$r_1: \quad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3} \quad ; \quad r_1: \quad \frac{x - x_2}{t_1} = \frac{y - y_2}{t_2} = \frac{z - z_2}{t_3}$$

son paralelas si y solo si se verifica (20).

Las rectas

$$r_1: \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases} \quad ; \quad r_2: \frac{x - x_2}{t_1} = \frac{y - y_2}{t_2} = \frac{z - z_2}{t_3}$$

son paralelas si y solo si se verifica (20).

Si las rectas están dadas por sus ecuaciones implícitas, para estudiar si son o no paralelas, se hallan, de la forma indicada anteriormente, sus ecuaciones paramétricas y se comprueba si se verifica (20).

Para estudiar si son o no paralelas las rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} x + y - z - 8 = 0 \\ 2x + y + z - 11 = 0 \end{cases}$$

se hallan las ecuaciones paramétricas de r_2:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = z + 8 \\ 2x + y = -z + 11 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2z + 3 \quad ; \quad y = 3z + 5$$

haciendo $z = \lambda$:

$$r_2: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\frac{-2}{-2} = \frac{3}{3} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \text{las rectas } r_1 \text{ y } r_2 \text{ no son paralelas.}$$

Condición de paralelismo entre una recta y un plano.

La recta

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{array}\right\} \quad \text{o} \quad \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

y el plano $ax + by + cz + d = 0$

son paralelos si y solo si

$$\boxed{a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0} \qquad (21)$$

La recta

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{array}\right\}$$

es paralela al plano $x + y + 3z + 6 = 0$, ya que $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3(-1) = 0$

y no es paralela al plano $3x - 5y + 6z - 2 = 0$, ya que $3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 6 - 5 - 6 \neq 0$

Posición relativa de una recta y un plano en el espacio.

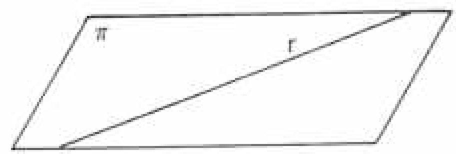
La recta y el plano podrán ser:
- *paralelos*
  - *la recta está contenida en el plano*
  - *la recta no está contenida en el plano*
- *no paralelos o incidentes (tienen un solo punto común)*

Sean la recta r y el plano π dados por las ecuaciones:

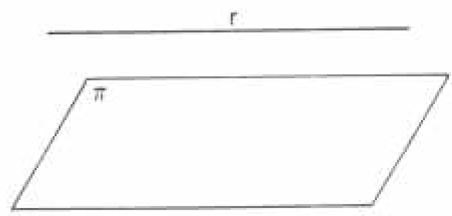
$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad \pi: \; ax + by + cz + d = 0$$

$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

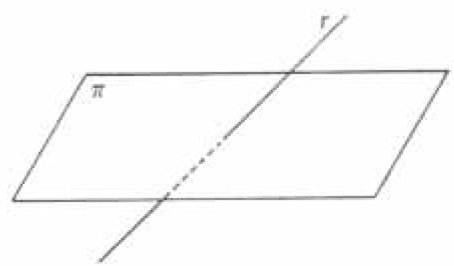
- $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \Rightarrow$ la recta está en el plano



- $ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0 \Rightarrow$ la recta no está en el plano



$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0 \Rightarrow$ la recta corta al plano



Estudiar, según los valores de m y n, la posición relativa del plano π y la recta r:

$$\pi: \; x + y + mz - n = 0 \quad ; \qquad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

(Univ. de Madrid)

El plano y la recta serán paralelos si: $\quad 1 \cdot 1 + 1(-1) + m \cdot 2 = 0 \Rightarrow m = 0$

Al ser la recta y el plano paralelos, si la recta está contenida en el plano, las coordenadas de cualquier punto de la recta satisface la ecuación del plano. El punto $A(0, 2, 0)$ es de la recta:

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - n = 0 \Rightarrow 2 - n = 0 \Rightarrow n = 2$$

De lo anterior resulta:

Si $\underline{m = 0 \text{ y } n = 2}$: la recta está contenida en el plano

" $\underline{m = 0 \text{ y } n \neq 2}$: la recta es paralela al plano y no está contenida en él

" $\underline{m \neq 0}$: la recta corta al plano.

Posición relativa de dos rectas en el espacio.

Dos rectas en el espacio podrán ser:

$$\begin{cases} \textit{paralelas} \begin{cases} \textit{paralelas y coincidentes} \\ \textit{paralelas y distintas} \end{cases} \\ \textit{no paralelas} \begin{cases} \textit{se cortan} \\ \textit{se cruzan} \end{cases} \end{cases}$$

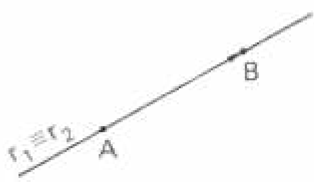
Supondremos que las dos rectas están dadas por sus ecuaciones paramétricas, ya que es fácil pasar a este tipo de ecuaciones si las rectas están dadas de otra forma.

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases} \quad ; \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + \mu t_1 \\ y = y_2 + \mu t_2 \\ z = z_2 + \mu t_3 \end{cases}$$

El punto $A(x_1, y_1, z_1)$ está sobre la recta r_1 y el punto $B(x_2, y_2, z_2)$ está sobre la recra r_2. El vector $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ tiene su origen sobre r_1 y su extremo sobre r_2. Los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ son paralelos, respectivamente a las rectas r_1 y r_2:

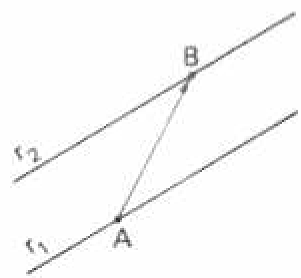
$\dfrac{v_1}{t_1} = \dfrac{v_2}{t_2} = \dfrac{v_3}{t_3} \Rightarrow r_1$ y r_2 son paralelas

$\dfrac{x_2 - x_1}{v_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{v_2} = \dfrac{z_2 - z_1}{v_3} \Rightarrow$ los vectores **v**, **t** y AB son paralelos, las dos rectas son *coincidentes*



$\dfrac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \dfrac{y_2 - y_1}{v_2}$ ó $\dfrac{x_2 - x_1}{v_1} \neq \dfrac{z_2 - z_1}{v_3} \Rightarrow$

el vector AB no es paralelo al vector **v**, las dos rectas son *paralelas y distintas*

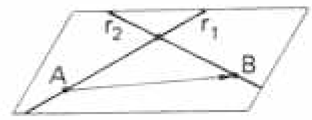


Si dos rectas son coincidentes, las coordenadas de cualquier punto de una de ellas satisfacen las ecuaciones de la otra. Si dos rectas son paralelas, para ver si son o no coincidentes, basta comprobar si las coordenadas de un punto de una de ellas satisfacen las ecuaciones de la otra.

$\dfrac{v_1}{t_1} \neq \dfrac{v_2}{t_2}$ ó $\dfrac{v_1}{t_1} \neq \dfrac{v_3}{t_3}$ $\Rightarrow$ r_1 y r_2 no son paralelas

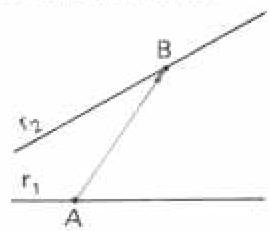
$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

los vectores **v**, **t** y AB son linealmente dependientes, las dos rectas están en un plano, *se cortan*



$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

los vectores **v**, **t** y AB son linealmente independientes, las dos rectas no están en el mismo plano, *se cruzan*



Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = -2\mu \\ z = 7 + 6\mu \end{cases}$$

(Univ. de Valencia)
(Univ. de Cantabria, 1991)

El vector $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ es paralelo a la recta r, y el vector $\mathbf{t} = (2, -2, 6)$ es paralelo a la recta s:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \Rightarrow \text{las rectas } r \text{ y } s \text{ son paralelas}$$

El punto $A(0, 2, 1)$ es de la recta r, y el punto $B(2, 0, 7)$ es de la recta s. El vector $AB = (2-0, 0-2, 7-1) = (2, -2, 6)$ tiene sus componentes proporcionales a las componentes del vector $\mathbf{v}$ (y a las del vector $\mathbf{t}$), luego *las dos rectas son coincidentes.*

Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: \ x = y = z \quad ; \qquad s: \ 2x + 1 = 2y = 2z + 2$$

(Univ. de Barcelona)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$r: \ x = y = z \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s:\quad 2x+1=2y=2z+2 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 2x+1=2y \\ 2z+2=2y \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}+y \\ z=-1+y \end{array} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}+\mu \\ y=\mu \\ z=-1+\mu \end{array}\right.$$

Ambas rectas son paralelas al vector $\mathbf{v}=(1,1,1)$, luego son paralelas.

El punto $A(0,0,0)$ pertenece a r: $2\cdot 0+1\neq 2\cdot 0\neq 2\cdot 0+2$. Las coordenadas del punto A no satisfacen las ecuaciones de la recta s. *Las rectas son paralelas y distintas.*

Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}\quad ;\quad s:\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

El vector $\mathbf{v}=(1,1,2)$ es paralelo a la recta r, y el vector $\mathbf{t}=(-2,-1,2)$ es paralelo a la recta s:

$$\frac{1}{-2}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{2}\ \Rightarrow$$ la rectas r y s no son paralelas, se cortarán o se cruzarán.

El punto $A(1,2,1)$ pertenece a r y el $B(3,3,-1)$ pertenece a s. Si el vector $AB=(3-1,3-2,-1-1)=(2,1,-2)$ es combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{t}$, los tres vectores estarán en un plano, las rectas se cortarán, en caso contrario se cruzarán:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$ (la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1) $\Rightarrow$ *las rectas se cortan*

Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}\qquad s:\ \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$$

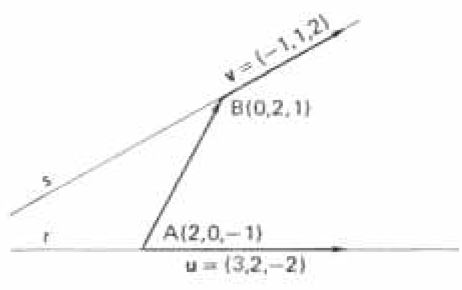
(Univ. de Santiago, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=-1-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2x=1-z\ ;\ x=\dfrac{1-z}{2} \\ 2y=3+z\ ;\ y=\dfrac{3+z}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}-\lambda \\ y=\dfrac{3}{2}+\lambda \\ z=2\lambda \end{array}\right.$$

La recta r es paralela al vector $\mathbf{u}=(3,2,-2)$, y la recta s es paralela al vector $\mathbf{v}=(-1,1,2)$. Como estos vectores no tienen sus componentes proporcionales, no son paralelos. Las rectas se cortan o se cruzan.

El punto $A(2,0,-1)$ pertenece a r, y el punto $B(0,2,1)$ pertenece a s (las coordenadas de B se obtienen haciendo $\lambda=\frac{1}{2}$). Si las rectas se cortan, los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $AB=(0-2,2-0,1+1)=(-2,2,2)$ son linealmente dependientes al estar en un plano, y si las rectas se cruzan, dichos vectores serán linealmente independientes.



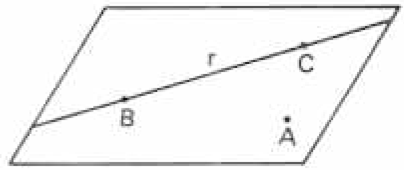
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6-8+4-4-12+4=-10\neq 0 \Rightarrow$$ los vectores son linealmente independientes, *las rectas se cruzan.*

Son muy frecuentes estos dos problemas:

- *Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto A que no pertenece a la recta r.*

— Si la recta está dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$



se hallar dos puntos de la recta, B y C, correspondientes a dos valores distinto de λ. Los puntos A , B y C determinan el plano pedido.

Sea hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

y al punto $A(-2, 0, 1)$.

Para $\lambda = 0$, obtenemos el punto $B(1, 2, 4)$, y para $\lambda = 1$, el punto $C(3, -1, 5)$. El plano definido por los punto A, B y C es el pedido:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x+2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 11(x+2) + 3y - 13(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$11x + 3y - 13z + 35 = 0$$

— Si la recta está dada por sus ecuaciones implícitas

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

se considera el haz de planos de eje la recta r, y de estos planos se halla el que pasa por el punto A.

Sea hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} 2x - 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

y al punto $A(4, 0, 1)$.

El haz de planos de eje la recta r es:

$$\lambda(2x - 3y + 4z + 8) + \mu(3x + y + 5z - 2) = 0$$

si $A(4, 0, 1)$ está en este plano:

$$\lambda(2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 8) + \mu(3 \cdot 4 + 0 + 5 \cdot 1 - 2) = 0 \Rightarrow 20\lambda + 15\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{20\lambda}{15} = -\frac{4}{3}\lambda$$

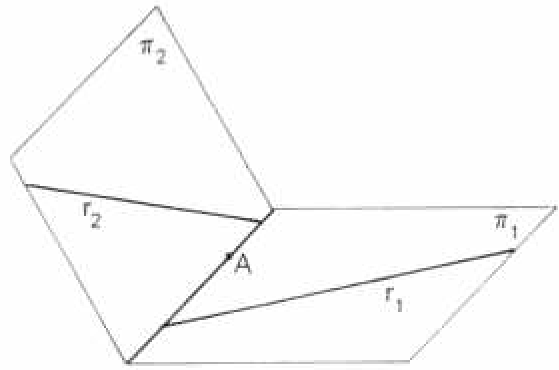
sustituyendo este valor en la ecuación del haz y dividiendo después por λ:

$$\lambda(2x - 3y + 4z + 8) - \frac{4}{3}\lambda(3x + y + 5z - 2) = 0 \Rightarrow 3(2x - 3y + 4z + 8) - 4(3x + y + 5z - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$6x + 13y + 8z - 32 = 0$$

♦ *Dadas dos rectas r_1 y r_2 y un punto A, no situado sobre ninguna de las rectas, hallar la recta que pasa por el punto A y corta a las rectas r_1 y r_2.*

Se halla el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto A, y el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto A. Los planos π_1 y π_2 se cortan según la recta pedida.



Sea hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(4, 0, 1) y corta a las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: \begin{cases} 2x - 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

La ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto A está calculada en el último ejemplo, es:

$$6x + 13y + 8z - 32 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para calcular la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto A hallamos dos puntos de r_2: para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, resultan, respectivamente, los puntos B(1, 2, −1) y C(3, −1, 0). El plano π_2 es el que contiene los puntos A, B y C, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-3) - (y+1) + 5z = 0 \Rightarrow$$

$$-4x - y + 5z + 11 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Los planos (a) y (b) determinan la recta pedida.

PROBLEMAS

6.1 **Obtener la ecuación implícita del plano determinado por el punto $A(1, 2, 3)$ y los vectores $u = (1, -1, 4)$ y $v = (1, 1, -2)$.**

(Univ. de Madrid)

Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 4)$ y $\mathbf{v} = (1, 1, -2)$ son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = 3 + 4\lambda - 2\mu \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda + \mu = x - 1 \\ -\lambda + \mu = y - 2 \\ 4\lambda - 2\mu = z - 3 \end{array}\right|$$

y la compatibilidad de este sistema, considerando a λ y μ como incógnitas, implica:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 4 & -2 & z-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 4 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

desarrollando por la última columna:

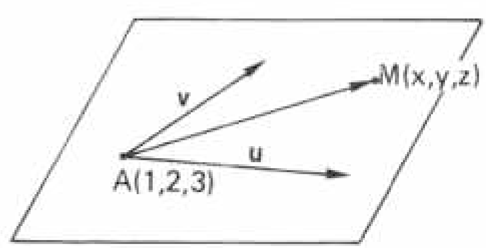
$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-2(x-1) + 6(y-2) + 2(z-3) = 0$; dividiendo por -2 y simplificando:

$$\boxed{x - 3y - z + 8 = 0}$$

SEGUNDA SOLUCION:

Si $M(x,y,z)$ es el punto genérico del plano, el vector $AM = (x-1, y-2, z-3)$ es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, puesto que los tres vectores están en un mismo plano y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes (sus componentes no son proporcionales), de donde:



$$\text{rango}\begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(x-1) + 6(y-2) + 2(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - 2y - z + 8 = 0}$$

6.2 Sean las rectas de ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -1) \quad ; \quad \mathbf{x} = \mu(3, 0, 1)$$

Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a ambas rectas.

(Univ. de Alicante)

La primera recta es paralela al vector $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ y la segunda al vector $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, por lo tanto el plano pedido es el que pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

Su ecuación vectorial es: $\boxed{(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(3, 0, 1)}$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 + 2\lambda + 3\mu \\ y &= 0 + \lambda + 0\cdot\mu \\ z &= 0 - \lambda + \mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 2\lambda + 3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda + \mu \end{aligned}}$$

Su ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x - 5y - 3z = 0}$$

6.3 Hallar las ecuaciones del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4} \quad ; \quad x = y = z$$

(Univ. de Salamanca)

El plano pedido es el que pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{u} = (2, 3, 4)$, paralelo a la primera recta, y $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, paralelo a la segunda recta:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= 0 + 2\lambda + \mu \\ y &= 0 + 3\lambda + \mu \\ z &= 0 + 4\lambda + \mu \end{aligned}\right\}} \quad \text{ecuaciones parametricas}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-x + 2y - z = 0} \quad \text{ecuación implícita.}$$

6.4 Determinar el plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$$

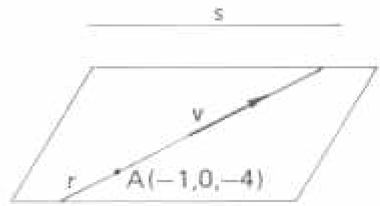
y es paralelo a la recta

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-10}{4}$$

(Univ. de Santiago de Compostela)
(Univ. de Barcelona)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} x+z=-5-y \\ x-z=\ \ 3+3y \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sumando: } 2x=-2+2y\ ;\ \ x=-1+y \\ \text{restando: } 2z=-8-4y\ ;\ \ z=-4-2y \end{array}$$



haciendo $y=\lambda$:

$$r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4-2\lambda \end{cases}$$

Si el plano pedido contiene a la recta r, contiene al punto A(−1,0,−4) de r y es paralelo a la recta r, o lo que es lo mismo contiene al punto A y es paralelo al vector $\mathbf{v}=(1,1,-2)$, vector que es paralelo a r.

Por otra parte, como el vector $\mathbf{u}=(2,3,4)$ es paralelo a la recta s, si el plano pedido es paralelo a la recta s, es paralelo al vector **u**.

El problema queda reducido a escribir las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto A(1, 0, 4) y es paralelo a los vectores $\mathbf{v}=(1,1,-2)$ y $\mathbf{u}=(2,3,4)$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=-1+\lambda+2\mu \\ y=0+\lambda+3\mu \\ z=-4-2\lambda+4\mu \end{array}\right\}}$$

Obtendremos la ecuación cartesiana o implícita de este plano eliminando λ y μ del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda+2\mu=x+1 \\ \lambda+3\mu=y \\ -2\lambda+4\mu=z+4 \end{array}\right|$$

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 4 & z+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 4 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3(z+4)-4y+4(x+1)+6(x+1)-4y-2(z+4)=0 \Rightarrow \boxed{10x-8y+z+14=0}$$

6.5 **Hallar la ecuación del plano que contiene al punto (1, −1, 0) y es paralelo a las rectas r y s de ecuaciones**

$$r \equiv \begin{cases} x=2-y \\ z=y \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{2y}{2} = \frac{-3z}{-3}$$

(Univ. de La Laguna — Tenerife, 1991)

Haciendo $y = \lambda$ en la ecuación de r tenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r es paralela al vector $\mathbf{u} = (-1, 1, 1)$ y la recta s es paralela al vector $\mathbf{v} = (5, 2, -3)$. El plano pedido es el que pasa por el punto $A(1, -1, 0)$ y es paralelo a estos vectores. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda + 5\mu \\ y = -1 + \lambda + 2\mu \\ z = 0 + \lambda - 3\mu \end{cases}}$$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-5(x-1) + 2(y+1) - 7z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{5x - 2y + 7z - 7 = 0}$$

6.6 **Sean las rectas**

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de un plano que pasa por $A(-1, -1, 0)$ y es paralelo a las dos rectas. Hallar la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

(Univ. de Castilla–La Mancha)

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\left.\begin{array}{r} -y + z = -3x \\ 2y - z = -x \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \text{sumando ambas ecuaciones:} \quad y = -4x \\ z = -3x + y = -3x - 4x = -7x \end{array}$$

haciendo $x = \lambda$:

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -7\lambda \end{cases}$$

El plano pedido es el que pasa por el punto $A(-1, -1, 0)$ es paralelo a los vectores $\mathbf{u} = (-5, 2, 0)$, paralelo a r, y $\mathbf{v} = (1, -4, -7)$, paralelo a s:

$$\begin{cases} x = -1 + (-5)\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + (-4)\mu \\ z = 0 + 0 \cdot \lambda + (-7)\mu \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 - 5\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - 4\mu \\ z = -7\mu \end{cases}}$$ ecuaciones paramétricas del plano pedido.

Eliminando λ y μ del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -5\lambda + \mu = x + 1 \\ 2\lambda - 4\mu = y + 1 \\ -7\mu = z \end{array}\right| \Rightarrow \text{rango} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -5 & 1 & x+1 \\ 2 & -4 & y+1 \\ 0 & -7 & z \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & x+1 \\ 2 & -4 & y+1 \\ 0 & -7 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$14(x+1) - 35(y+1) + 18z = 0 \Rightarrow \boxed{14x + 35y - 18z + 49 = 0}$ ecuación cartesiana o implícita.

Intersección del plano con el eje OX: $y = 0,\ z = 0 \Rightarrow 14x + 49 = 0;\ x = -\frac{7}{2}$: $M(-\frac{7}{2}, 0, 0)$

" " " " " OY: $x = 0,\ z = 0 \Rightarrow 35y + 49 = 0;\ y = -\frac{7}{5}$: $N(0, -\frac{7}{5}, 0)$

" " " " " " OZ: $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow -18z + 49 = 0;\ z = \frac{49}{18}$: $P(0, 0, \frac{49}{18})$

6.7 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(−1, 2, 0) y contiene a la recta r

$$r: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

(Univ. de Santiago) — (Univ. de Salamanca) — (Univ. de Málaga)

Todos los planos que contienen a la recta r pertenecen al haz de planos de eje la recta r:

$$\lambda(x - 2y + z - 3) + \mu(y + 3z - 5) = 0 \qquad (1)$$

Hallemos λ y μ para que el plano (1) contenga al punto A.
Si el punto A(−1, 2, 0) pertenece al plano (1), sus coordenadas satisfacen la ecuación (1):

$$\lambda(-1 - 2 \cdot 2 + 0 - 3) + \mu(2 + 3 \cdot 0 - 5) = 0 \Rightarrow -8\lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{8}{3}\lambda$$

sustituyendo este valor en (1), dividiendo por λ y simplificando:

$$\lambda(x - 2y + z - 3) - \frac{8}{3}\lambda(y + 3z - 5) = 0 \Rightarrow 3(x - 2y + z - 3) - 8(y + 3z - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{3x - 14y - 21z + 31 = 0}$$

6.8 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1) y contiene a la recta

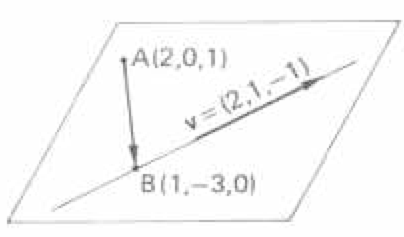
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

(Univ. de Cantabria) — (Univ. de Santiago)

El punto B(1, −3, 0) pertenece a la recta. Si el plano pedido contiene el punto A y a la recta, contiene a los puntos A y B, por tanto es paralelo al vector

$$AB = (1-2, -3-0, 0-1) = (-1, -3, -1)$$

y al vector $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$
que es el vector de dirección de la recta.



El plano pedido es, por tanto, el plano que pasa por A(2, 0, 1) y es paralelo a los vectores AB y **v**. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2 + (-1)\lambda + 2\mu \\ y = 0 + (-3)\lambda + 1\cdot\mu \\ z = 1 + (-1)\lambda + (-1)\mu \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - \lambda + 2\mu \\ y = \quad -3\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}}$$

Eliminando λ y μ del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda + 2\mu = x-2 \\ -3\lambda + \mu = y \\ -\lambda - \mu = z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 2 & x-2 \\ -3 & 1 & y \\ -1 & -1 & z-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & x-2 \\ -3 & 1 & y \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(z-1) - 2y + 3(x-2) + (x-2) - y + 6(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{4x - 3y + 5z - 13 = 0}$$

ecuación cartesiana o implícita.

SEGUNDA SOLUCION: Si el plano contiene dos puntos de la recta, contiene a la recta. Igualando a 0 y a 1 las ecuaciones continuas de la recta obtenemos dos puntos de la recta: B(1, − 3, 0) y C(3, − 2, −1).

El plano pedido es el plano determinado por los puntos A(2, 0, 1), B(1, − 3, 0) y C(3, − 2, − 1):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la primera columna la cuarta multiplicada por −2, y restando la cuarta columna a la tercera:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +1\cdot\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x-2) - 3y + 5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 3y + 5z - 13 = 0}$$

TERCERA SOLUCION: Escribiendo las ecuaciones de la recta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} \\ \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 2y - 7 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{array}\right|$$

todos los planos que contienen a la recta son los pertenecientes al haz de planos de eje dicha recta:

$$\lambda(x - 2y - 7) + \mu(y + z + 3) = 0 \qquad (1)$$

y de todos estos planos nos interesa el que contiene al punto A(2, 0, 1):

$$\lambda(2-2\cdot 0-7)+\mu(0+1+3)=0 \Rightarrow -5\lambda+4\mu=0, \quad \mu=\frac{5}{4}\lambda$$

llevando este valor a (1) y dividiendo después por λ:

$$\lambda(x-2y-7)+\frac{5}{4}\lambda(y+z+3)=0 \; ; \; 4(x-2y-7)+5(y+z+3)=0 \Rightarrow \boxed{4x-3y+5z-13=0}$$

6.9 **Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, 0)$ y contiene a la recta**

$$r: \left| \begin{aligned} x &= 2+\lambda \\ y &= 3-3\lambda \\ z &= 4+2\lambda \end{aligned} \right.$$

(Univ. de Valencia)

Haciendo, en las ecuaciones de la recta r, $\lambda=0$ y $\lambda=1$, obtenemos los puntos de r: $B(2, 3, 4)$ y $C(3, 0, 6)$. El plano pedido es el determinado por los puntos A, B y C:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 18(x-1)+2y-6z=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{9x+y-3z-9=0}$$

6.10 **Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano determinado por el punto $A(1,-1, 0)$ y la recta que pasa por el punto $B(2,2,2)$ y tiene por vector director $(1, 2, 3)$.**

(Univ. de Barcelona)

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $B(2, 2, 2)$ y es paralela al vector $(1, 2, 3)$ son:

$$r: \left| \begin{aligned} x &= 2+\lambda \\ y &= 2+2\lambda \\ y &= 2+3\lambda \end{aligned} \right.$$

Haciendo $\lambda=-1$ obtenemos el punto $C(1, 0,-1)$ de r. El plano determinado por el punto A y la recta r es el plano determinado por el punto A y los puntos $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 0,-1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-5(x-1) + (y+1) + z = 0 \quad \Rightarrow \quad -5x + y + z + 6 = 0$$

Todos los planos paralelos al plano $-5x + y + z + 6 = 0$ tienen por ecuación:

$$-5x + y + z + k = 0$$

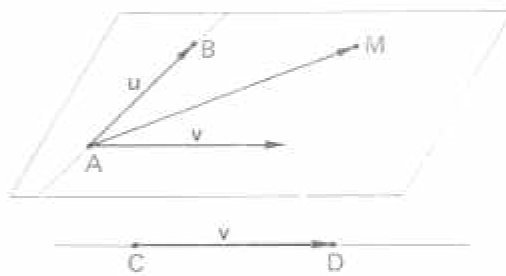
y el que pasa por el origen de coordenadas es:

$$\boxed{-5x + y + z = 0}$$

6.11 **Dados los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, -1, 3)$, hallar la ecuación del plano que contiene a la recta AB y es paralelo a la recta CD.**

(Univ. del País Vasco)

El plano definido es el que pasa por el punto A y es paralelo a los vectores $\mathbf{u} = AB = (-1, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = CD = (3, -3, 3)$.



Si $M(x, y, z)$ es el punto genérico del plano, el vector $AM = (x-1,\ y,\ z-2)$ es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, por estar los tres vectores en el mismo plano y ser $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ l. i. (sus componentes no son proporcionales: $\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{1}{3}$), de donde:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6(x-1) + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + y - 1 = 0}$$

6.12 **Una recta es paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y pasa por el punto $(2, 0, 0)$. Hallar sus ecuaciones.**

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

La recta pedida es la recta que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ y es paralela a la recta determinada por los dos planos:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 1 - x \\ z &= -x \end{aligned}\right\} \quad \text{haciendo } x = \lambda: \quad \left.\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}\right\}$$

La recta pedida es la recta que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 0 - \mu \\ z = 0 - \mu \end{cases}}$$

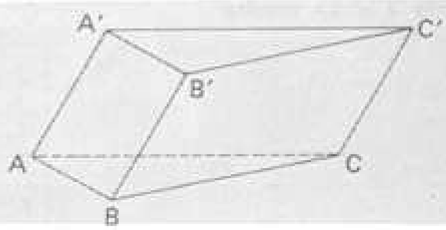
SEGUNDA SOLUCION: La recta pedida la podemos determinar como intersección de dos planos que son paralelos respectivamente a los planos dados y pasan ambos por el punto $(2, 0, 0)$.

— ecuación de todos los planos paralelos al $x + y - 1 = 0$: $x + y + k = 0$, de estos planos nos interesa el que pasa por el punto $(2, 0, 0)$, o sea que las coordenadas de $(2, 0, 0)$ deben satisfacer a la ecuación $x + y + k = 0$: $2 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \underline{x + y - 2 = 0}$ es la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ y es paralelo al plano $x + y - 1 = 0$.

— ecuación de todos los planos paralelos al plano $x + z = 0$: $x + z + h = 0$, el que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ verifica: $2 + 0 + h = 0 \Rightarrow h = -2 \Rightarrow \underline{x + z - 2 = 0}$ es la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ y es paralelo al plano $x + z = 0$.

La recta pedida es: $\boxed{\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}}$ ecuaciones cartesianas o implícitas.

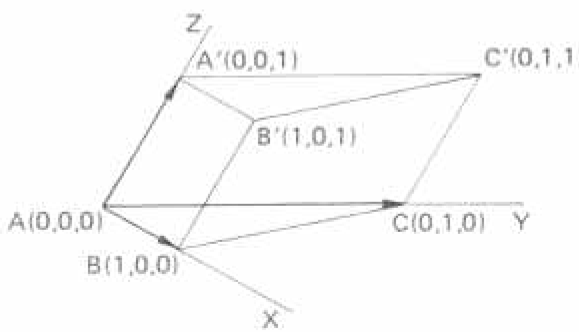
6.13 Si consideramos un prisma triangular como el de la figura y elegimos como sistema de referencia en el espacio $\{A;\ \{\overrightarrow{AB}\}, \{\overrightarrow{AC}\}, \{\overrightarrow{AA'}\}\}$, ¿cuál será la ecuación de la recta CC'? ¿Y la de la recta B'C'?



(Univ. de Alicante)

Respecto del sistema de referencia dado, las coordenadas de los vértices son los indicados en la figura.

La ecuación de la recta CC' es la de la recta que pasa por el punto $C(0, 1, 0)$ y es paralela al vector $CC' = (0-0, 1-1, 1-0) = (0, 0, 1)$:



$$\begin{rcases} x = 0 + 0\cdot\lambda \\ y = 1 + 0\cdot\lambda \\ z = 0 + 1\cdot\lambda \end{rcases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{matrix}}$$

La ecuación de la recta B'C' es la de la recta que pasa por el punto $B'(1,0,1)$ y es paralela al vector $B'C' = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$:

$$\begin{rcases} x = 1 + (-1)\cdot\lambda \\ y = 0 + 1\cdot\lambda \\ z = 1 + 0\cdot\lambda \end{rcases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{matrix}}$$

Se podían haber obtenido las ecuaciones continuas de ambas rectas considerando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

6.14 **Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos:**

$$x+y-5z+4=0 \quad ; \quad 3x-y+2z-1=0$$

(Univ.de Baleares)

Estudiando el sistema formado por ambas ecuaciones, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & -5\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad ; \quad N=\begin{bmatrix}1 & 1 & -5 & -4\\ 3 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

tienen el mismo rango, 2, puesto que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible.

Para resolver el sistema se toman como incógnitas principales x e y que corresponde a las columnas del menor que nos ha dado el rango. El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{aligned} x+y &= -4+5z\\ 3x-y &= 1-2z\end{aligned}\right\} \quad x=\frac{\begin{vmatrix}-4+5z & 1\\ 1-2z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{3-3z}{-4} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -4+5z\\ 3 & 1-2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{13-17z}{-4}$$

haciendo $z = 4\lambda$ resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{3}{4}+3\lambda\\ y &= -\frac{13}{4}+17\lambda\\ z &= 4\lambda\end{aligned}}$$

6.15 **Dados los planos** $3x-y+z=1 \quad ; \quad x+y-2z=0$ **hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos.**

(Univ. de Madrid)

Como los coeficientes de x, y, z no son proporcionales, los planos no son paralelos. Se cortan según una recta, hallemos sus ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} 3x-y+z &= 1\\ x+y-2z &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x-y &= 1-z\\ x+y &= 2z\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{1+z}{4} \; ; \quad y=\frac{-1+7z}{4}$$

haciendo $z = 4\lambda$ se obtiene $\left|\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}+\lambda\\ y &= -\frac{1}{4}+7\lambda\\ z &= 4\lambda\end{aligned}\right.$ que son las ecuaciones paramétricas de la recta. El vector $(1, 7, 4)$ es paralelo a la recta intersección de ambos planos y por lo tanto paralelo a los dos planos.

6.16 **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta**

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

(Univ. de Sevilla)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 + z \\ x - y &= 4 - 3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -1+z & 3 \\ 4-3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-11+8z}{-5} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1+z \\ 1 & 4-3z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9-7z}{-5}$$

haciendo $z = -5\lambda$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{5} + 8\lambda \\ y = -\dfrac{9}{5} - 7\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}$$

La recta pedida es la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $v = (8, -7, -5)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 8\lambda \\ y = 2 - 7\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases}}$$

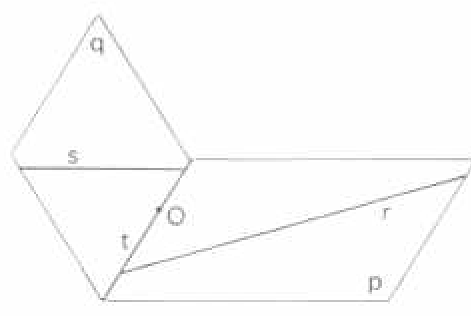
y sus ecuación continua:

$$\boxed{\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{-5}}$$

6.17 **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por origen y corta a las rectas**

$$r: \quad x = 2y = z - 1 \qquad ; \qquad s: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

(Univ. de Sclamanca)



La recta r y el punto O determinan el plano p, y elpunto O y la recta s determinan el plano q. Los planos p y q se cortarán en la recta t pedida. En efecto: esta recta pasa por el punto O que está en los dos planos; la recta t por estar en el plano p corta a r que también está en p (dos rectas que están en el mismo plano se cortan, si son paralelas se cortan en el punto del infinito), y también t corta a s por estar ambas en plano q.

El problema queda reducido a hallar las ecuaciones de los planos p y q.

Cálculo de la ecuación del plano p:

$$r: \quad x = 2y = z-1 \iff \begin{cases} x = 2y \\ x = z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ x-z+1 = 0 \end{cases}$$

el haz de planos de eje la recta r es: $\qquad \lambda(x-2y) + \mu(x-z+1) = 0 \qquad (1)$

por pasar por $O(0,0,0)$: $\lambda(0-0) + \mu(0-0+1) = 0 \Rightarrow \mu = 0$ sustituyendo este valor en (1) tenemos el plano determinado por el punto O y la recta r:

$$\lambda(x-2y) = 0 \Rightarrow x-2y = 0 \qquad (2)$$

Cálculo de la ecuación del plano q:

Este plano queda determinado por el punto $O(0,0,0)$ y dos puntos de s, por ejemplo el $A(0,1,0)$ y el $B(2,4,1)$, obtenidos al igualar a 0 y a 1 las ecuaciones de s.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1)^{2+4}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2z = 0 \qquad (3)$$

La recta pedida es la determinada por los planos (2) y (3):

$$\boxed{\begin{cases} x-2y = 0 \\ x-2z = 0 \end{cases}}$$

6.18 **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 1, 1), es paralela al plano**

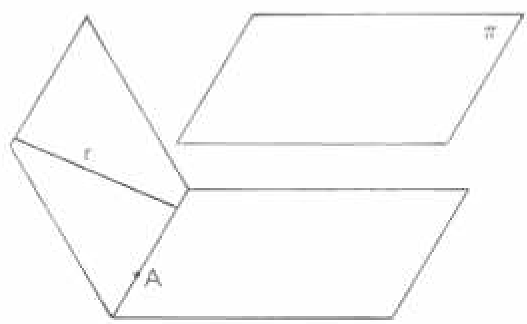
$$\pi: \quad x-2y-z = 0$$

y está en un mismo plano que la recta

$$r: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

(Univ. del País Vasco)

La recta pedida será la intersección del plano que pasa por el punto A y es paralelo al plano π, con el plano determinado por el punto A y la recta r.



Obtención del plano paralelo al plano π y que pasa por el punto A:

– todos los planos que son paralelos al plano π están contenidos en la ecuación:

$$x-2y-z+k = 0 \qquad (1)$$

– el que buscamos pasa por el punto $A(1,1,1)$: $\quad 1-2\cdot 1-1+k = 0 \Rightarrow k = 2$

– llevando este valor a (1): $\quad x-2y-z+2 = 0 \qquad (2)$

Obtención del plano determinado por el punto $A(1,1,1)$ y la recta r:

– igualando a 0 y a 1 las ecuaciones continuas de r obtenemos dos puntos de r: $B(1,0,0)$ $C(2,2,3)$.

– el plano buscado es que pasa por los puntos A, B y C:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-1=0 \qquad (3)$$

La recta pedida está determinada por la intersección de los planos **(2)** y **(3)**:

$$\boxed{\begin{cases} x-2y-z+2=0 \\ x+\ \ y-z-1=0 \end{cases}}$$

6.19 **Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector (1, 2, 3) y que corte a las rectas**

$$r:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+2 \end{cases}$$

(Univ. de Valladolid)

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} = \lambda \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Haciendo $z = \mu$ en las ecuaciones de s: $\begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = 2-\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Para cada valor de λ obtendremos un punto de la recta r, y para cada valor de μ un punto de la recta s.

Sean a y b los valores de λ y μ que nos dan las coordenadas de los puntos de corte de la recta pedida con las rectas r y s: $A(1+2a, -2+3a, a)$ y $B(1+2b, 2-b, b)$. La ecuación de la recta pedida será (recta que pasa por los puntos A y B):

$$\frac{x-1-2a}{1+2b-1-2a} = \frac{y+2-3a}{2-b+2-3a} = \frac{z-a}{b-a} \Rightarrow \frac{x-1-2a}{-2a+2b} = \frac{y+2-3a}{-3a-b+4} = \frac{z-a}{b-a} \qquad (1)$$

si la recta es paralela al vector (1, 2, 3), este vector y el de dirección de la recta son paralelos:

$$\frac{-2a-2b}{1} = \frac{-3a-b+4}{2} = \frac{b-a}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2a+2b}{1} = \dfrac{-3a-b+4}{2} \\ \dfrac{-2a+2b}{1} = \dfrac{b-a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-5b=-4 \\ 5a-5b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a=1$; $b=1$

Llevando estos valores a las coordenadas de A y B resulta: A(3,1,1) y B(3,1,1), o sea que, ambos puntos son coincidentes.

La recta pedida es la recta que pasa por el punto A(3,1,1) y es paralela al vector (1,2,3):

$$\boxed{\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}}$$

6.20 **Dada la recta** $\quad r: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{-1}$

hallar la ecuación de una paralela a ellas que se apoya en las rectas:

$$s: \ \frac{x}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2} \quad ; \qquad t: \ \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{5}$$

(Univ. de Cádiz, 1991)

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas s y t:

$$s: \ \frac{x}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$t: \ \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{5} = \mu \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1-\mu \\ y = 3-2\mu \\ z = -1+5\mu \end{cases}$$

Sean a y b, respectivamente, los valores de λ y μ que nos dan las coordenadas de los puntos de corte de la recta pedida con las rectas r y s: $A(-4a, 2+3a, -2a)$ y $B(-1-b, 3-2b, -1+5b)$.

La ecuación de la recta pedida será (recta que pasa por los puntos A y B):

$$\frac{x+4a}{-1-b+4a} = \frac{y-2-3a}{3-2b-2-3a} = \frac{z+2a}{-1+5b+2a} \Rightarrow \frac{x+4a}{4a-b-1} = \frac{y-2-3a}{-3a-2b+1} = \frac{z+2a}{2a+5b-1} \qquad (1)$$

si esta recta es paralela a la recta r:

$$\frac{4a-b-1}{3} = \frac{-3a-2b+1}{4} = \frac{2a+5b-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4a-b-1}{3} = \dfrac{2a+5b-1}{-1} \\[2ex] \dfrac{-3a-2b+1}{4} = \dfrac{2a+5b-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5a+7b=2 \\ 5a+18b=3 \end{cases} \Rightarrow \quad 11b = 1 \ ; \ b = \frac{1}{11} \qquad 5a = 2-7b = 2-\frac{7}{11} = \frac{15}{11} \ ; \quad a = \frac{3}{11}$$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$\frac{x+\dfrac{12}{11}}{\dfrac{12}{11}-\dfrac{1}{11}-1} = \frac{y-2-\dfrac{9}{11}}{-\dfrac{9}{11}-\dfrac{2}{11}+1} = \frac{z+\dfrac{6}{11}}{\dfrac{6}{11}+\dfrac{5}{11}-1} \Rightarrow \frac{x+\dfrac{12}{11}}{0} = \frac{y-\dfrac{31}{11}}{0} = \frac{z+\dfrac{6}{11}}{0}$$

Este resultado nos dice que el vector AB es el (0, 0, 0), o sea, que los puntos A y B son coincidentes, las rectas se cortan en el punto $A(-\frac{12}{11}, \frac{31}{11}, -\frac{6}{11})$.

La ecuación pedida es la de la recta que pasa por el punto A y es paralela a la recta r:

$$\boxed{\frac{x+\frac{12}{11}}{3}=\frac{y-\frac{31}{11}}{4}=\frac{z+\frac{6}{11}}{-1}}$$

6.21 **Determinar las ecuaciones de la recta simétrica de:**

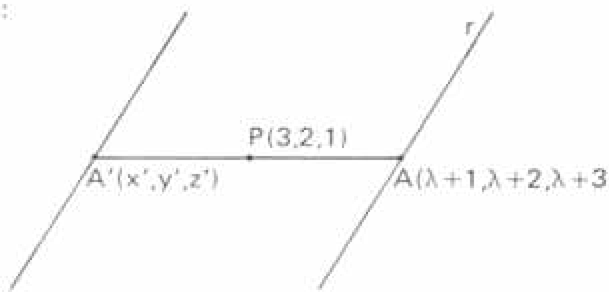
$$r:\quad x-1=y-2=z-3$$

respecto del punto P: (3, 2, 1).

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x-1=y-2=z-3=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=\lambda+2 \\ z=\lambda+3 \end{cases}$$



Si $A(\lambda+1, \lambda+2, \lambda+3)$ es el punto genérico de la recta r y $A'(x', y', z')$ el simétrico de A respecto de P, por ser P el punto medio del segmento AA', las coordenadas de P son la semisuma de las coordenadas de A y A':

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\lambda+1)+x'}{2}=3 \\ \dfrac{(\lambda+2)+y'}{2}=2 \\ \dfrac{(\lambda+3)+z'}{2}=1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x'=-\lambda+5 \\ y'=-\lambda+2 \\ z'=-\lambda-1 \end{array}}$$

ecuaciones paramétricas de la recta pedida.

SEGUNDA SOLUCION: Para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ obtenemos los puntos de r: B(1, 2,3) y C(2,3,4)
Hallemos los simétricos de B y C respecto del punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{2}=3 \\ \dfrac{y+2}{2}=2 \\ \dfrac{z+3}{2}=1 \end{array}\right| \Rightarrow B(5,2,-1) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2}=3 \\ \dfrac{y+3}{2}=2 \\ \dfrac{z+4}{2}=1 \end{array}\right| \Rightarrow C(4,1,-2)$$

La recta que pasa por los puntos B y C es la pedida:

$$\frac{x-5}{4-5}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z+1}{-2+1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-5}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}}$$

6.22 **Estudiar la posición relativa de los planos**

$$mx+y-z=1, \quad 2x-y+mz=3m, \quad x-2y+(m+1)z=3m-1$$

según los distintos valores de m.

(Univ. de León)

Estudiemos el sistema:
$$\left.\begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ 2x - y + mz = 3m \\ x - 2y + (m+1)z = 3m-1 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -2 & m+1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \\ 1 & -2 & m+1 & 3m-1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = -m(m+1) + m + 4 - 1 + 2m^2 - 2(m+1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

Si $\underline{m \neq 1}$: $\left\{\begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \\ \text{rango } B = 3 \end{array}\right. \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, tiene solución única, lo que implica que los tres planos se cortan en un punto, forman un ángulo triedro.

Si $\underline{m = 1}$, las ecuaciones de los planos son:

$$x + y - z = 1 \quad ; \quad 2x - y + z = 3 \quad ; \quad x - 2y + 2z = 2$$

como los coeficientes de x, y, z de cualquier par de planos no son proporcionales, no hay ningún par de planos paralelos.

Estudiemos el sistema formado por las tres ecuaciones:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

el menor de A, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ el rango de A es 2, ya que $|A| = 0$.

Orlando, en B, este menor son la cuarta columna y la tercera fila: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

(la tercera fila es igual a la segunda menos la primera)

De aquí resulta: $\left.\begin{array}{l} \text{rango de } A = 2 \\ \text{rango de } B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Los tres planos se cortan según una recta.

6.23 Estudiar la posición relativa de los planos

$$\left.\begin{array}{rl} x + (1+a)y + z &= 0 \\ (2+a)x - y - 2z &= 0 \\ 3x - z &= a \end{array}\right\}$$

según los valores de a. Hallar la intersección de los tres planos para el valor de a con el cual esta intersección contiene más de un punto.

(Univ. de Sevilla)

Estudiemos el sistema formado por las tres ecuaciones.

Escribamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 1 \\ 2+a & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 1 & 0 \\ 2+a & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1 \\ 2+a & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1-6(1+a)+3+(1+a)(2+a) = a^2-3a \; ; \quad |M| = 0 \Leftrightarrow a^2-3a=0 \; ;$$
$$a = 0, a = 3$$

Si $a \notin \{0, 3\}$: $\left.\begin{array}{l} \text{rango de } M = 3 \\ \text{rango de } N = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única). Los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 0$:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rango de M es 2. También el rango de N es 2, ya que la nueva columna consta solo de ceros.

$\left.\begin{array}{l} \text{rango } M = 2 \\ \text{rango } N = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Al no haber ningún par de planos que tengan los coeficientes de las incógnitas proporcionales, no hay ningún par de planos paralelos. Los tres planos son distintos y se cortan según una recta.

Considerando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \end{array}\right\}}$$ ecuaciones cartesianas de la recta en la que se cortan los tres planos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-z \\ 2x-y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x = z \; ; \; x = \frac{z}{3} \qquad \frac{z}{3}+y=-z \; ; \; y = -\frac{4}{3}z.$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 3\lambda \end{array}\right\}}$$ ecuaciones paramétricas de la recta

Si $a = 3$:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad N = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

como $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$, el rango de M es 2. Orlando este menor con la tercera fila y la cuarta columna de N:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -63 \neq 0 \Rightarrow \text{el rango de } N \text{ es } 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango } M = 2 \\ \text{rango } N = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución).}$$

Al no haber ningún par de planos que tengan los coeficientes de las incógnitas proporcionales, no hay ningún par de planos paralelos. Los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, los planos forman una superficie prismática.

6.24 **Hallar el valor de k para que los planos**

$$x + y + z = 2 \quad ; \quad 2x + 3y + z = 3 \quad ; \quad kx + 10y + 4z = 11$$

tengan una recta común.

(Univ. de Valencia)

Si los tres planos se cortan en una recta común, los infinitos puntos de la recta serán solución del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos, este sistema será compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones), se ha de verificar:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{bmatrix} = 2$$

de aquí $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12 + k + 20 - 3k - 10 - 8 = 0 \Rightarrow 14 - 2k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 7}$

Para $k = 7$ el rango de la primera matriz es 2, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Orlando este menor con la última columna de la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 30 + 24 - 20 - 12 - 33 = 0$$

esto nos dice que también el rango de la segunda matriz es 2. Si este rango no hubiera sido 2, los tres planos no se cortarían en una recta común para ningún valor de k.

6.25 **Determinar a y b para que los planos**

$$2x - y + z = 3 \quad ; \quad x - y + z = 2 \quad ; \quad 3x - y - az = b$$

se corten en una recta r.

Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto A(2,1. 3)

(Univ. de Barcelona) — (Univ. de Santiago)

Si los tres planos se cortan en una recta común, los infinitos puntos de la recta serán solución del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{aligned}\right\}$$

o sea, este sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones), de donde:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 3 - 1 + 3 + 2 - a = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Para $a = -1$, el rango de la primera matriz es 2, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Orlando este menor con la última columna de la segunda matriz y la tercera fila, para que el rango de la matriz se a 2, ha de ser nulo el menor de tercer orden resultante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2b - 6 - 3 + 9 + 4 + b = 0 \Rightarrow -b + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Considerando el menor que nos ha dado el rango, el sistema estudiado es equivalente al formado por las primeras ecuaciones: La recta contenida en los tres planos del enunciado es la determinada por los dos primeros, sus ecuaciones son:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z - 3 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

El haz de planos de eje dicha recta es:

$$\lambda(2x - y + z - 3) + \mu(x - y + z - 2) = 0 \qquad (1)$$

Si el plano (1) contiene al punto $A(2, 1, 3)$:

$$\lambda(2 \cdot 2 - 1 + 3 - 3) + \mu(2 - 1 + 3 - 2) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{3\lambda}{2}$$

llevando este valor a (1) y dividiendo luego por λ:

$$\lambda(2x - y + z - 3) - \frac{3\lambda}{2}(x - y + z - 2) = 0 \Rightarrow 2(2x - y + z - 3) - 3(x - y + z - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x + y - z = 0} \quad \text{ecuación pedida.}$$

6.26 **Estudiar la posición relativa de la recta**

$$r: \left|\begin{aligned} x &= 3\lambda - 1 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= 2\lambda \end{aligned}\right.$$

y el plano p determinado por los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(1, 4, 3)$.

(Univ. de Madrid)

Hallemos la ecuación del plano p.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Restando a la primera columna la cuarta multiplicada por 2, y a la tercera columna la cuarta, y desarrollando el determinante resultante por los elementos de la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-(x-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (z-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2(x-2) - y + (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-2x - y + z + 3 = 0$$

Veamos si la recta y el plano son o no paralelos:

$$3\cdot(-2) + 1(-1) + 2\cdot 1 = -5 \neq 0$$

la recta no es paralela al plano, lo corta.

6.27 **Hallar la ecuación del plano que pase por los puntos $(2, 1, -3)$, $(1, 2, -1)$ y $(0, -1, -1)$ y calcular los valores del parámetro m para que la recta definida como intersección de los planos:**

$$\pi_1 \equiv mx - y = -6 + m \ , \quad \pi_2 \equiv x - z = 0$$

corte al plano anterior en un punto.

(Univ. de Oviedo)

Ecuación del plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+z+1 & y+z+2 & z+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} x+z+1 & y+z+2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3x+3z+3-y-z-2) =$$

$$= 2(3x - y + 2z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x - y + 2z + 1 = 0}$$

Si la recta determinada por los planos π_1 y π_2 corta al plano anterior en un punto, el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = -1 \\ mx - y = -6 + m \\ x - z = 0 \end{array}\right|$$

es compatible determinado. Se tendrá:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 0 & -6+m \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3+2-m = 5-m$$

Si $\underline{m \neq 5}$: rango A = rango B = 3 $\Rightarrow$ la recta corta al plano en un punto.

6.28 **Determinar el parámetro "a" para que la recta definida por las ecuaciones:**

$$\begin{cases} 3x + ay + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

esté situada en el plano $\quad x + y + z + 1 = 0.$

(Univ. de Cantabria)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} 3x + z &= 1 - ay \\ 2x - 2z &= 6 - 6y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1-ay & 1 \\ 6-6y & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+2ay-6+6y}{-8} = 1 - \frac{a+3}{4}\,y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-ay \\ 2 & 6-6y \end{vmatrix}}{-8} = \frac{18-18y-2+2ay}{-8} = -2 + \frac{9-a}{4}\,y$$

haciendo $y = 4\lambda$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1-(a+3)\lambda \\ y &= 4\lambda \\ z &= -2+(9-a)\lambda \end{aligned}\right\}$$

Si esta recta está sobre el plano $x+y+z+1=0$, cualquiera que sea λ, los valores de x, y, z dados por las ecuaciones paramétricas deben satisfacer la ecuación del plano:

$$[1-(a+3)\lambda] + 4\lambda + [-2+(9-a)\lambda] + 1 = 0 \Rightarrow (10-2a)\lambda = 0 \Rightarrow 10-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

SEGUNDA SOLUCION: Decir que la recta determinada por los dos primeros planos está en el tercer plano equivale a decir que los tres planos se cortan según una recta. El sistema formado por las tres ecuaciones será compatible indeterminado, las coordenadas de los puntos de la recta intersección de los tres planos serán las infinitas soluciones del sistema.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se verificará: rango M = rango N = 2.

$$\text{rango } M = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18-2a+2-6+6-2a = -4a+20 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Para este valor de a: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -18 + 30 + 2 - 6 - 18 + 10 = 0 \Rightarrow$ rango $N = 2$

luego $\boxed{a = 5}$ es el valor pedido.

6.29 **Dada la recta r de ecuación:**

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

y el plano $2x - y + mz = 1$, obtener el valor de m de manera que recta y plano resulten paralelos. ¿Existe algún m para el que la recta esté contenida en el plano?

(Univ. de la Laguna –Tenerife, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 + z \\ 2x - y &= 1 - 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 3x = 3 - z\,; \quad x = 1 - \frac{z}{3} \qquad y = 2 + z - x = 2 + z - 1 + \frac{z}{3} = 1 + \frac{4}{3}z$$

haciendo $z = 3\lambda$ obtenemos:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

La recta y el plano dados serán paralelos si:

$2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + m \cdot 3 = 0\,; \Rightarrow \boxed{m = 2} \Rightarrow 2x - y + 2z - 1 = 0$ es la ecuación de un plano paralelo a la recta.

Si la recta, además de ser paralela al plano, está contenido en él, las coordenadas de cualquier punto de la recta debe satisfacer la ecuación del plano. El punto $A(1, 1, 0)$ es de la recta.

$2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow$ para $m = 2$ la recta está contenida en el plano.

Si $m \neq 2$, la recta y el plano no serán paralelos, la recta cortará al plano en un punto.

6.30 **Estudiar la posición relativa de las rectas:**

$$r: \quad x - 1 = y - 2 = \frac{z-3}{3}\,; \qquad s: \quad \frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$$

(Univ. de Barcelona)

$$r: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}\,; \qquad s: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

r es paralela al vector $(1, 1, 3)$ y s es paralela al vector $(3, 1, 2)$, como estos vectores no son paralelos (sus componentes no son proporcionales) las rectas no son paralelas. Se cortarán o cruzarán. Como el punto $(1, 2, 3)$ es común a ambas, se cortan.

6.31 **Determinar la posición relativa de las rectas**

$$r: \; x = -y = -z \quad ; \quad s: \begin{cases} y = x + \sqrt{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

(Univ. de Alicante)

Podemos escribir las ecuaciones paramétricas de ambas rectas, haciendo $z = \lambda$ en r y $x = \mu$ en s:

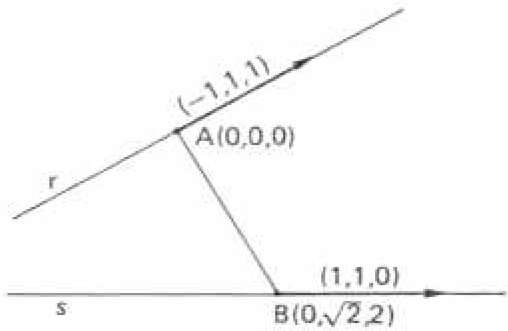
$$r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu + \sqrt{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas, r es paralela al vector $(-1, 1, 1)$ y s es paralela al vector $(1, 1, 0)$, y estos vectores no son paralelos, ya que sus componentes no son proporcionales.

Las rectas se cortan o se cruzan.

Para $\lambda = 0$ y $\mu = 0$ obtenemos los puntos $A(0, 0, 0)$ de r y $B(0, \sqrt{2}, 2)$ de s.

Si las rectas se cortan los vectores $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $AB = (0, \sqrt{2}, 2)$ estarán en el mismo plano y serán linealmente dependientes. Inversamente, si estos tres vectores son linealmente dependientes, las dos rectas estarán en un mismo plano y se cortarán.



Si las rectas se cruzan los tres vectores serán linealmente independientes, e inversamente, si los tres vectores son linealmente independientes las rectas se cruzan.

Estudiamos la dependencia lineal de los tres vectores estudiando el rango de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -2 + \sqrt{2} - 2 = -4 + \sqrt{2} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{los vectores son l. i.} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$$

6.32 **Dadas las rectas**

$$r: \; \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2} \quad ; \quad r': \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

estudiar su posición y, si fuese posible, la ecuación del plano que las contiene.

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

El vector $u = (1, -1, -2)$ es paralelo a r, y el vector $v = (1, -1, 2)$ es paralelo a r'.

El punto $A(1, 1, -2)$ pertenece a r, y $B(2, 1, 0)$ pertenece a r'. Vector $AB = (1, 0, 2)$.

Según el razonamiento del problema anterior, como $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-2}{2}$, las rectas se cortan o se cruzan.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{las rectas se cruzan}}$$

Si las rectas se cruzan no hay ningún plano que las contenga.

6.33 **Determinar a para que las rectas r y s se corten. ¿Pueden ser coincidentes?**

$$r: \ \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \ ; \qquad s: \ \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

(Univ. de Madrid)

El punto $A(3, 3, -a)$ es de r y el $B(1, -1, -4)$ es de s. El vector $(2, -1, 2)$ es paralelo a r y el vector $(4, 3, 5)$ es paralelo a s.

Según el razonamiento anterior, las rectas r y s se cortarán si los vectores $(2, -1, 2)$, $(4, 3, 5)$ y $AB = (1-3, -1-3, -4+a) = (-2, -4, -4+a)$ son linealmente dependientes, o sea, si:

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -4+a \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 32 + 6(-4+a) + 4(-4+a) + 12 + 40 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-10 + 10a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

Las rectas no pueden ser coincidentes, puesto que como r es paralela al vector $(2, -1, 2)$ y s es paralela al vector $(4, 3, 5)$, al no ser paralelos estos vectores (sus componentes no son proporcionales) las rectas no son paralelas y por tanto no pueden coincidir.

6.34 **Estudiar la posición relativa de las rectas del espacio:**

$$r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -y \\ 2y + z = x + 5 \end{cases}$$

Hallar además la ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

(Univ. de La Laguna — Tenerife)

Escribamos las ecuaciones paramétricas de r y s:

$$r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 9 - 2x \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 9 - 2\lambda \end{cases} \qquad (1)$$

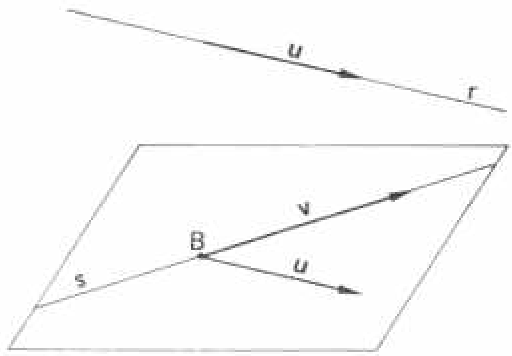
$$s: \begin{cases} x = -y \\ 2y + z = x + 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ z = x + 5 - 2y = 3x + 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = 3\mu + 5 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} r \text{ es paralela al vector } & u = (1, 0, -2) \\ s \;\;" \;\;\; " \;\;\; " \;\;\; " & v = (1, -1, 3) \end{array}\right\} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{-2}{3} \Rightarrow \text{ las rectas se cortan o se cruzan.}$$

De (1): $A(0, 1, 9) \in r$, y de (2): $B(0, 0, 5) \in s$. $AB = (0-0, 0-1, 5-9) = (0, -1, -4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 5 \neq 0, \quad \boxed{\text{las rectas se cruzan}}$$

El plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r es el plano que contiene al punto B (0, 0, 5) de la recta s y es paralelo a los vectores $u = (1, 0, -2)$ y $v = (1, -1, 3)$. Sus ecuaciones paramétricas son:



$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + \lambda + \mu \\ y = 0 - \lambda + 0 \cdot \mu \\ z = 5 + 3\lambda - 2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda \\ z = 5 + 3\lambda - 2\mu \end{array}}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y + (z-5) + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{2x + 5y + z - 5 = 0}$$

6.35 **Determinar razonadamente si las rectas**

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan.

(Univ. de Madrid)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de s y r:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -1 + 2z \\ 2x - y = 1 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x = z \;;\; x = \frac{1}{3}z \qquad y = -1 + 2z - x = -1 + 2z - \frac{1}{3}z = -1 + \frac{5}{3}z$$

haciendo $z = 3\lambda$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 + z \\ x - y = 1 + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3x = 2 + 3z \;;\; x = \frac{2}{3} + z \qquad y = 1 + z - 2x = 1 + z - \frac{4}{3} - 2z = -\frac{1}{3} - z$$

haciendo $z = \mu$:

$$s: \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + \mu \\ y = -\dfrac{1}{3} - \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

La recta r es paralela al vector **u** = (1, 5, 3), y la recta t es paralela al vector **v** = (1, −1, 1), como estos vectores no son paralelos (sus componentes no son porporcionales), las rectas no son paralelas, por lo tanto, se cortan o se cruzan.

El punto A(0, −1, 0) pertenece a r, y el punto $B(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ pertenece a s:

Las componentes del vector AB son: $(\frac{2}{3} - 0, -\frac{1}{3} + 1, 0 - 0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. Veamos si los vectores **u**, **v** y AB son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 10 \neq 0$$

los tres vectores no están en el mismo plano, $\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$.

6.36 **Analiza, en función de a, cuándo las rectas r y s son paralelas y obtén, en ese caso, la ecuación del plano que las contiene:**

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+2}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - (a+1)z = 2 \\ y - 2az = 0 \end{cases}$$

(Univ. de Valencia, 1991)

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\left. \begin{array}{r} 2x - (a+1)z = 2 \\ y - 2az = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{a+1}{2} z \\ y = 2az \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + (a+1)\lambda \\ y = 4a\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right|$$

Las rectas r y s son paralelas, respectivamente, a los vectores (1, 2, 1) y (a + 1, 4a, 2). Las rectas serán paralelas si y solo si lo son estos vectores, de donde:

$$\frac{a+1}{1} = \frac{4a}{2} = \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para a = 1:
$$s \equiv \begin{cases} 2x - 2z - 2 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Todos los planos que contienen a la recta s están contenidos en el haz de planos:

$$\lambda(2x - 2z - 2) + \mu(y - 2z) = 0 \qquad (1)$$

como la recta r es paralela a s, el plano que contiene a ambas rectas será el plano del haz (1) que contiene un punto de la recta r, por ejemplo al punto A(− 1, −5, −2):

$$\lambda[2(-1)-2(-2)-2]+\mu[-5-2(-2)]=0 \Rightarrow \lambda\cdot 0+\mu(-1)=0\ ;\quad \mu=0$$

llevando este valor a (1), nos queda, después de dividir por λ:

$$2x-2z-2=0\ ;\quad \boxed{x-z-1=0}$$

6.37 **Hallar la condición para que sean coplanarias las rectas**

$$r_a:\begin{cases} x = az+2 \\ y = z+3 \end{cases} \quad ; \quad r_b:\begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+b \end{cases}$$

(Univ. de Valladolid)

Dos rectas que son paralelas están en el mismo plano. Si no son paralelas, y están en el mismo plano, se cortan.

Hallemos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas, haciendo $z=\lambda$ en las ecuaciones de r_a, y $z=\mu$ en las ecuaciones de r_b:

$$r_a:\begin{cases} x = a\lambda+2 \\ y = \lambda+3 \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad r_b:\begin{cases} x = 2\mu+1 \\ y = -\mu+b \\ z = \mu \end{cases}$$

La primera recta es paralela al vector $(a, 1, 1)$ y la segunda al vector $(2, -1, 1)$. Cualquiera que sea el valor de a, estos vectores no son paralelos $\left(\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}\right)$, y por tanto las rectas tampoco son paralelas.

El punto $A(2, 3, 0)$ pertenece a la primera recta y el punto $B(1, b, 0)$ pertenece a la segunda recta. Si las rectas se cortan, los vectores $(a, 1, 1)$, $(2, -1, 1)$ y $AB = (1-2, b-3, 0-0) = (-1, b-3, 0)$ son linealmente dependientes, de donde:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & b-3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1+2(b-3)-1-a(b-3)=0 \Rightarrow \boxed{-ab+3a+2b-8=0}$$

condición pedida.

6.38 **Dado el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} ax + aby + (1-a)z = b \\ x + by + z = 2 \\ ax + ay + (1-a)z = b \end{cases}$$

se pide:

1º) Demostrar que si $a=0$, dicho sistema representa una recta y hallar sus ecuaciones paramétricas.

2º) ¿Para qué valores de a y b representa un plano?

(Univ. de Alicante)

1º) Si $a=0$, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{r} z = b \\ x + by + z = 2 \\ z = b \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} z = b \\ x + by + z = b \end{array}\right\}$$

como los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, estas dos ecuaciones representan dos planos no paralelos, que al cortarse determinan una recta.

$$\left.\begin{array}{l} z = b \\ x = 2-b-by \end{array}\right\} \Rightarrow \text{haciendo } y = \lambda: \quad \boxed{\left.\begin{array}{l} x = 2-b-b\lambda \\ y = \lambda \\ z = b \end{array}\right\}}$$

2º) Las tres ecuaciones representarán el mismo plano si, tomadas de dos en dos, sus coeficientes son proporcionales:

– si tomamos la primera ecuación y la tercera:

$$\frac{a}{a} = \frac{ab}{a} = \frac{1-a}{1-a} = \frac{b}{b} \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

– si tomamos la primera ecuación y la segunda, haciendo $b = 1$:

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1} = \frac{1-a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

6.39 Calcular "t" para que las rectas r y s se corten en un punto. Encontrar ese punto.

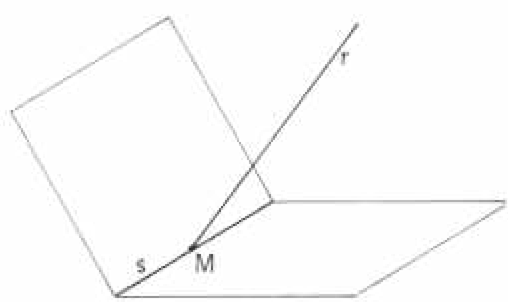
$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{5} \quad ; \quad s: \begin{cases} x + 2y + z = t \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

(Univ. Castilla – La Mancha, 1991)

El punto M, intersección de las rectas r y s, es el punto de intersección de la recta r con los planos que determinan la recta s.

Hallemos las coordenadas de M calculando la intersección de la recta r con el plano

$$2x - y - z + 2 = 0:$$



– escribiendo las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{5} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 3\lambda - 4 \\ z = 5\lambda - 1 \end{cases}$$

– sustituyendo estos valores en la ecuación del plano:

$$2(2\lambda + 1) - (3\lambda - 4) - (5\lambda - 1) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{4}$$

– sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left| \begin{array}{l} x = 2\cdot\dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{22}{4} = \dfrac{11}{2} \\ y = 3\cdot\dfrac{9}{4} - 4 = \dfrac{11}{4} \\ z = 5\cdot\dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{41}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \text{ las coordenadas de } M \text{ son } \left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{11}{4}, \dfrac{41}{4}\right)$$

Como el punto M está en el plano $x + 2y + z = t$, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano:

$$\frac{11}{2} + 2\cdot\frac{11}{4} + \frac{41}{4} = t \Rightarrow \boxed{t = \frac{85}{4}}$$

6.40 Las coordenadas de dos puntos distintos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ satisfacen a un mismo sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Se pide deducir razonadamente:

1º Las coordenadas de su punto medio también lo satisfacen.

2º El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es nulo.

(Univ. de Madrid)

1º Sea el sistema
$$\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array} \right.$$

cada ecuación del sistema representa un plano, y como las coordenadas de los puntos P y Q satisfacen el sistema, los puntos P y Q están sobre los tres planos, o lo que es lo mismo, los tres planos se cortan según la recta PQ. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de la recta PQ satisfacen el sistema y, en particular, las coordenadas del punto medio del segmento PQ también.

2º) El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones, o sea que el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas. Si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que 3, el menor de orden 3 igual al determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

6.41 Hallar a y b para que las rectas siguientes sean paralelas:

$$r \equiv \left| \begin{array}{l} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{array} \right. \qquad s \equiv 4x = 2y + 6 = z$$

(Univ. de Alicante)

Si $a = 3$ y $b = -1$, la recta r no está determinada, pues los dos planos dados serían paralelos.

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

Si $\underline{a \neq 3}$: $\left. \begin{array}{l} 2x + ay = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - bz \end{array} \right\}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+z & a \\ 3-bz & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{3 + 3z - 3a + abz}{6 - 2a} = \dfrac{(3-3a) + (3+ab)z}{6 - 2a}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ 2 & 3-bz \end{vmatrix}}{6-2a} = \frac{6-2bz-2-2z}{6-2a} = \frac{4-(2b+2)z}{6-2a}$$

haciendo $z = (6-2a)\lambda$:

$$r: \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{3-3a}{6-2a} + (3+ab)\lambda \\ y = \dfrac{4}{6-2a} - (2b+2)\lambda \\ z = \qquad (6-2a)\lambda \end{array} \right.$$

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\left.\begin{array}{r} 4x = 2y + 6 \\ z = 2y + 6 \end{array}\right| \quad x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad (\text{haciendo } y = 2\mu) \quad s: \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} + \mu \\ y = 2\mu \\ z = 6 + 4\mu \end{array} \right.$$

El vector $\mathbf{u} = (3+ab, -2b-2, 6-2a)$ es paralelo a r, y el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$ es paralelo a la recta s. Las rectas r y s serán paralelas si los vectores **u** y **v** son paralelos. Los vectores serán paralelos si:

$$\frac{3+ab}{1} = \frac{-2b-2}{2} = \frac{6-2a}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3+ab}{1} = \dfrac{-2b-2}{2} \\ \dfrac{-2b-2}{2} = \dfrac{6-2a}{4} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ab+b+4=0 \\ a-2b-5=0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad a = 2b+5$$

$$(2b+5)b+b+4=0; \quad 2b^2+6b+4=0; \quad b = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

para $b=-1$: $a = 2(-1)+5 = 3$, que son los valores para los que no está definida la recta r.

para $b=-2$: $a = 2(-2)+5 = 1$; $\boxed{a = 1 \quad b = -2}$ son los valores pedidos

Si $\underline{a = 3 \text{ y } b \neq -1}$: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=1 \\ 2x+3y+bz=3 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - z = 1-3y \\ 2x+bz = 3-3y \end{array}\right| \Rightarrow$

$$x = \frac{(3-3y)+(1-3b)y}{2b+2}; \qquad z = \frac{4}{2b+2}$$

haciendo $y = (2b+2)\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-3y}{2b+2} + (1-3b)\lambda \\ y = \qquad (2b+2)\lambda \\ z = \dfrac{4}{2b+2} \end{array}\right| \text{ ecuaciones paramétricas de r.}$$

Las rectas r y s serán paralelas si:

$$\frac{1-3b}{1} = \frac{2b+2}{2} = \frac{0}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-3b=0 \\ 2b+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{3} = b = -1 \quad \text{solución imposible}$$

las rectas no son paralelas.

CAPITULO 7

PRODUCTO VECTORIAL EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL

PRODUCTO ESCALAR

Sea V el espacio vectorial real de los vectores libres del espacio. Se llama **producto escalar** de dos vectores libres $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, al número real obtenido multiplicando los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman. El producto escalar de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ se simboliza por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$:

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\alpha}$$

Si los módulos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son respectivamente 2 y 3, y dichos vectores forman un ángulo de 60°:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Propiedades:

1º) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geqslant 0 \qquad \forall \mathbf{u}\in V \qquad$ (sólo es 0 si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

2º) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \qquad \forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in V^2$

3º) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \qquad \forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in V^3$

4º) $(\lambda\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \qquad \forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in V^2$ y $\lambda\in\mathbf{R}$

5º) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares, o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

6º) $(\lambda\,\mathbf{u}+\mu\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+\mu(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \qquad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$ y $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in V^3$

7º) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \qquad \forall\mathbf{u}\in V$

Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de V, (x, y, z) y (x', y', z') las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ respecto de la base B,

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3)\cdot(x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) = x\,x'\,|\mathbf{e}_1|^2 + y\,y'\,|\mathbf{e}_2|^2 + z\,z'\,|\mathbf{e}_3|^2 +\\ + (x\,y' + x'\,y)\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + (x\,z' + x'\,z)\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 + (y\,z' + y'\,z)\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3\end{aligned}}$$

Si $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 3$, áng. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 30^\circ$, áng. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$ y áng. $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 45^\circ$:

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 1\cdot 2\cdot\cos 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ ;\quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = 1\cdot 3\cdot\cos 60^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ ;\quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = 2\cdot 3\cdot\cos 45^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

y el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ es:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot 3\cdot 1^2 + 5\cdot(-2)\cdot 2^2 + (-3)\cdot 1\cdot 3^2 + [2\cdot(-2) + 3\cdot 5]\cdot\sqrt{3} + [2\cdot 1 + 3(-3)]\cdot\frac{3}{2} + [5\cdot 1 + (-2)(-3)]\cdot 3\sqrt{2} =$$

$$= -\frac{143}{2} + 11\sqrt{3} + 33\sqrt{2}$$

En el caso particular en que los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sean perpendiculares dos a dos y sus módulos igual a 1, la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se llama **base ortonormal o métrica**, verificándose que

$$|\mathbf{e}_1|^2 = 1\ ; \quad |\mathbf{e}_2|^2 = 1\ ; \quad |\mathbf{e}_3|^2 = 1\ ; \quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0\ ; \quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = 0\ ; \quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = 0$$

siendo en este caso la forma analítica del producto escalar:

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = xx' + yy' + zz'}$$

El producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (2, -3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 6, 7)$, referidos a una base ortonormal es:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot 5 + (-3)\cdot 6 + 4\cdot 7 = 20$$

Respecto de una base ortonormal, el módulo del vector $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ es

$$\boxed{|\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

y el ángulo formado por los vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ se obtiene por la fórmula

$$\boxed{\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ serán perpendiculares si y sólo si

$$\boxed{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0}$$

Los módulos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del ejemplo anterior son:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}$$

El ángulo de los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (6, 3, 4)$, referidos a una base ortonormal, está determinado por la fórmula:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1\cdot 6 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 4}{\sqrt{1 + 4 + 9}\ \sqrt{36 + 9 + 16}} = \frac{12}{\sqrt{14}\ \sqrt{61}}$$

Los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-2, 5, a)$, referidos a una base ortonormal, serán perpendiculares si y solo si $a = 4$, ya que

$$1\cdot(-2) + (-2)\cdot 5 + 3\cdot a = 0 \Leftrightarrow -12 + 3a = 0 \Rightarrow a = 4$$

ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO.

El espacio vectorial V de los vectores libres del espacio dotado del producto escalar se llama **espacio euclídeo** de los vectores libres del espacio.

IGUALDADES EN EL ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL:

$|\mathbf{u}| = 0 \iff \mathbf{u} = 0$ — $|\mathbf{u}|$ es el módulo del vector $\mathbf{u}$, $|\lambda\mathbf{u}|$ es el módulo del vector $\lambda\mathbf{u}$

$|\lambda\mathbf{u}| = |\lambda|\cdot|\mathbf{u}|$ — $|\lambda|$ es el valor absoluto del número real λ

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2);$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2)$$

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$

DESIGUALDADES EN EL ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL

Desigualdad de Cauchy–Schwarz: $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$

Desigualdad triangular o de Minkowski: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

ORIENTACION DEL ESPACIO VECTORIAL REAL DE LOS VECTORES DEL ESPACIO

Si $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base y respecto de esta base los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, linealmente independientes, tienen respectivamente las coordenadas $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, se dice que los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ y $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tienen la misma orientación si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0$$

También se dice que los vectores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tienen orientación positiva si al colocar el eje del sacacorchos paralelo a $\mathbf{v}_3$, al girar de $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ según el menor ángulo, el sacarorchos avanza en el sentido de $\mathbf{v}_3$.

Sean $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 3, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (5, 1, 4)$ tres vectores referidos a la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0 \Rightarrow$$ los vectores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tienen la misma orientación que los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Los vecores $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ tienen distinta orientación que los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -24 < 0$$

Los vectores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ y $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ tienen distinta orientación, el determinante cuyas filas son respectivamente las coordenadas de los primeros vectores tiene distinto signo que el correspondiente a los tres últimos.

PRODUCTO VECTORIAL.

Sea **V** el espacio vectorial real de los vectores libres del espacio, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de **V** y **u** y **v** dos vectores de **V** expresados en la base B.

El **producto vectorial** de los vectores **u** y **v** es otro vector, que lo representaremos por $u \wedge v$, definido de la siguiente forma:

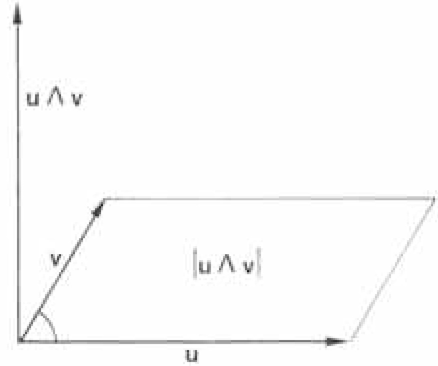
1º) Su módulo es igual al producto de los módulos de **u** y **v** por el valor absoluto del seno del ángulo que forman:

$$|u \wedge v| = |u| \cdot |v| \cdot |\operatorname{sen}(u, v)|$$

igual al área del paralelogramo construido sobre dos representantes de **u** y **v** con un origen común.

2º) Su dirección es perpendicular a **u** y a **v**.

3º) Su sentido está determinado por la condición de que los vectores $(u, v, u \wedge v)$ tienen la misma orientación que los vectores que constituyen la base (e_1, e_2, e_3).



Si los vectores $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ están referidos a una base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\boxed{u \wedge v = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3}$$

Esta fórmula se recuerda facilmente desarrollando por los elementos de la primera fila el determinante:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

pero téngase en cuenta que la última expresión no es en sí un determinante, al no ser todos los elementos de sus filas o columnas, elementos de un cuerpo.

Sean los vectores $u = (-1, 2, 3)$ y $v = (-2, 1, 4)$ referidos a la base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, hallar:

1º) El producto vectorial de u por v.

2º) El área del paralelogramo construido sobre dos representantes de u y v con un origen común.

3º) Comprobar que el vector $u \wedge v$ es perpendicular a los vectores u y v.

1º) $$u \wedge v \equiv \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

2º) El área pedida es igual al módulo del vector $u \wedge v$:

$$S = \sqrt{5^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$$

3º) El vector $u \wedge v$ será perpendicular a los vectores **u** y **v**, si el producto escalar del primero por cada uno de los otros dos es nulo:

$$(u \wedge v) \cdot u = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = -5 - 4 + 9 = 0$$

$$(u \wedge v) \cdot v = 5 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 4 = -10 - 2 + 12 = 0$$

Propiedades del producto vectorial:

a). Cumple la propiedad anticonmutativa: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \qquad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}^2$

b). No cumple, en general, la propiedad asociativa.

c). Cumple la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{V}^3$$

d). $\lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v}) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V}^2$

e). $\mathbf{u} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$

f). Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$; en particular: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Si $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

g). Si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal:

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \ ; \qquad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$$

h). $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \qquad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{V}^3$

PRODUCTO MIXTO.

El **producto mixto** de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, que lo representaremos por $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, es igual al número real que resulta de hallar el producto escalar del vector $\mathbf{u}$ por el vector $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. O sea, el producto mixto de tres vectores es igual al producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos:

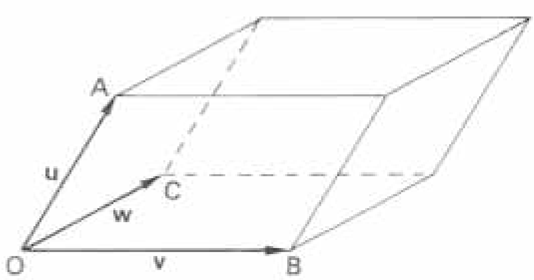
$$\boxed{[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})}$$

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3)$ están referidos a una base ortonormal, la expresión analítica del producto mixto es

$$\boxed{[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Propiedades del producto mixto:

1º) Si OA, OB y OC son tres representantes de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, el producto mixto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre OA, OB, y OC, si la orientación de $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ coincide con la de la base ortonormal, y el mismo volumen con signo negativo si las orientaciones son distintas.

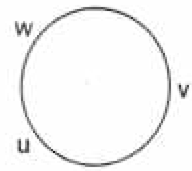


2º) Si el producto mixto de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es nulo, estos tres vectores son linealmente dependientes, si OA, OB y OC son tres representantes de ellos, OA, OB y OC son coplanarios.

3º) Si alguno de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ es el vector nulo, $\mathbf{0}$, el producto mixto es nulo.

4º) No cambia el producto mixto al permutar circularmente los vectores:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$$



5º) Si se cambia entre sí dos vectores, el producto mixto cambia de signo:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}]$$

6º) No cambia el producto mixto al añadirle a uno de los vectores una combinación lineal de los otros dos:

$$[\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \qquad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

7º) $$[\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

8º) $$[\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \lambda [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

El producto mixto de los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 1, -2)$ es:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

y el volumen del parelelepípedo construido sobre tres representantes de dichos vectores con un origen común es también 2.

PROBLEMAS

7.1 Dados los vectores

$$u_1 = (2,0,0), \quad u_2 = (0,1,-3) \quad y \quad u_3 = a\cdot u_1 + b\cdot u_2$$

¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de u_3 valga la unidad?

(Univ. de Alicante)

$$u_3 = a(2,0,0) + b(0,1,-3) = (2a, b, -3b)$$

$$|u_3| = 1 \Rightarrow 4a^2 + b^2 + 9b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{4a^2 + 10b^2 = 1}$$

7.2 Calcular los valores de x e y para que el vector $(x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $(3,2,0)$ y $(2,1,-1)$.

(Univ. de Santiago)

Por ser $(x, y, 1)$ y $(3,2,0)$ perpendiculares: $3x + 2y + 1\cdot 0 = 0$

" " " " $(2,1,-1)$ " $2x + y - 1 = 0$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2 \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-1} = -3$$

7.3 Los módulos de los vectores a, b, c son, respectivamente, 3, 1 y 4.
Determinar el valor de

$$a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a$$

sabiendo que la suma de los vectores es 0.

(Univ. de Salamanca)

Considerando la propiedad conmutativa del producto escalar, la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma de vectores, y que

$$a \cdot a = |a|^2 = 9 \ ; \quad b \cdot b = |b|^2 = 1 \ ; \quad c \cdot c = |c|^2 = 16 :$$

$$a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad (a + b + c) \cdot (a + b + c) = 0 \cdot 0$$

$$a \cdot a + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot b + b \cdot c + c \cdot a + c \cdot b + c \cdot c = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) + 1 + 16 = 0$$

$$\boxed{a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -13}$$

7.4 **Demostrar que si u, v y w son tres vectores de R^3 perpendiculares dos a dos, entonces $\{u, v, w\}$ es una base de R^3.**

(Univ. de Murcia)

Se supone que ninguno de los tres vectores es el vector nulo, pues ningún conjunto de vectores en el que intervenga el vector nulo puede ser una base de un espacio vectorial.

El conjunto $\{u, v, w\}$ será una base si los tres vectores son linealmente independientes, ya que cualquier subconjunto de tres vectores linealmente independientes de R^3 es una base.

Los vectores u, v y w serán linealmente independientes si la igualdad

$$a u + b v + c w = 0 \qquad (1)$$

únicamente se verifica para $a = b = c = 0$.

Por ser los tres vectores ortogonales dos a dos, y distintos del vector nulo:

$$u \cdot v = v \cdot u = 0 \ ; \quad u \cdot w = w \cdot u = 0 \ ; \quad v \cdot w = w \cdot v = 0 \ ; \quad |u| \neq 0 \ ; \quad |v| \neq 0 \ ; \quad |w| \neq 0$$

Multiplicando escalarmente (1) por u:

$$(a u + b v + c w) \cdot u = 0 \cdot u \quad \Rightarrow \quad a(u \cdot u) + b(v \cdot u) + c(w \cdot u) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a |u|^2 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a |u|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ , \text{ por ser } |u|^2 \neq 0.$$

De la misma forma se obtiene que $b = c = 0$ al multiplicar escalarmente (1) por v y w.

Si la relación (1) se verifica únicamente para $a = b = c = 0$, los vectores u, v y w son linealmente independientes y forman una base.

7.5 **Siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del espacio euclídeo tridimensional constituido por vectores unitarios que forman entre sí ángulos de $60°$, calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.**

(Univ. de Salamanca)

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) \quad \Rightarrow \quad \cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \qquad (1)$$

$$u \cdot v = (e_1 + e_2) \cdot (e_1 - e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 + e_2 \cdot e_1 - e_2 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° - 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° - 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$|u|^2 = u\cdot u = (e_1+e_2)(e_1+e_2) = e_1\cdot e_1 + e_1\cdot e_2 + e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2 =$$

$$= 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad |u| = \sqrt{3}$$

$$|v|^2 = v\cdot v = (e_1 - e_2 + e_3)(e_1 - e_2 + e_3) = e_1\cdot e_1 - e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 - e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2 - e_2\cdot e_3 + e_3\cdot e_1 -$$

$$- e_3\cdot e_2 + e_3\cdot e_3 = 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ - 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ - 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ -$$

$$- 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ - 1\cdot 1\cdot \cos 60^\circ + 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad |v| = \sqrt{2}$$

sustituyendo en (1) los valores calculados:

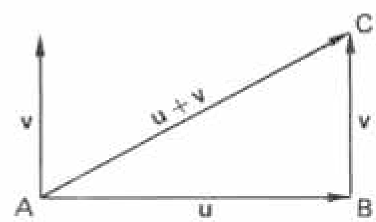
$$\boxed{\cos(u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}}$$

7.6 **Si $u\cdot v$ representa el producto escalar de los vectores u y v, justifica razonadamente las siguientes propiedades:**

1) $u\cdot v = 0 \Rightarrow (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v$ **(Teorema de Pitágoras)**

2) $(u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) = 2(u\cdot u + v\cdot v)$ **(Ley del paralelogramo)**

(Univ. de Valencia, 1991)



1) $u\cdot v = v\cdot u = 0 \Rightarrow$ u y v son perpendiculares

$$(u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v = u\cdot u + v\cdot v$$

por ser $u\cdot v = v\cdot u = 0$.

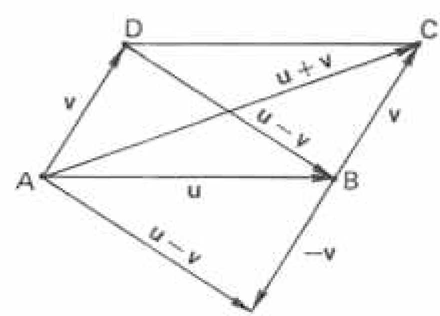
$$(u+v)\cdot(u+v) = |u+v|\cdot|u+v|\cdot\cos 0 = |u+v|^2 = \overline{AC}^2$$

$$u\, u = |u|^2\cdot\cos 0 = |u|^2 = \overline{AB}^2 \quad ; \quad v\cdot v = |v|^2\cdot\cos 0 = |v|^2 = \overline{BC}^2$$

de donde: $\quad u\cdot v = 0 \Rightarrow (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow$

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2) $(u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v + u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v = 2(u\cdot u + v\cdot v)$ (1)



$$(u+v)\cdot(u+v) = |u+v|^2 = \overline{AC}^2$$

$$(u-v)\cdot(u-v) = |u-v|^2 = \overline{DB}^2$$

$$u\cdot u = |u|^2 = \overline{AB}^2 \quad ; \quad v\cdot v = |v|^2 = \overline{BC}^2$$

de estas igualdades y de (1) resulta:

$$\overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \Rightarrow$$

En un paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

7.7 **Calcular los vectores de longitud la unidad, ortogonales a los vectores $(2,-2,3)$ y $(3,-3,2)$.**

(Univ. de Santiago)
(Univ. de Salamanca, 1991)

Sea $\mathbf{u} = (a, b, c)$ el vector buscado:

– por ser $\mathbf{u}$ unitario: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (1)

– por ser $\mathbf{u}$ perpendicular a $(2,-2,3)$: $2a - 2b + 3c = 0$ (2)

– " " " " " $(3,-3,2)$: $3a - 3b + 2c = 0$ (3)

De (2) y (3):

$$\left.\begin{matrix} 2a + 3c = 2b \\ 3a + 2c = 3b \end{matrix}\right| \Rightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} 2b & 3 \\ 3b & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-5b}{-5} = b \; ; \; c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2b \\ 3 & 3b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-5} = 0$$

llevando estos valores a (1): $b^2 + b^2 + 0 = 1 \; ; \; 2b^2 = 1 \, , \; b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

luego los vectores pedidos son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

SEGUNDA SOLUCION:

El producto vectorial de ambos vectores nos dará un vector ortogonal a ellos:

$$(2,-2,3) \wedge (3,-3,2) \equiv \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4+9)\,e_1 - (4-9)\,e_2 + (-6+6)\,e_3 = 5\,e_1 + 5\,e_2 + 0 \cdot e_3$$

dividiendo este vector por su módulo: $\sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2}$, obtenemos un vector unitario perpendicular a los dados:

$$\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

El vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, opuesto al anterior, es otra solución.

7.8 **Siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores cualesquiera del espacio, probar que el producto escalar de $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es siempre cero.**

(Univ. de Madrid)

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es un vector perpendicular al vector $\mathbf{a}$ y perpendicular al vector $\mathbf{b}$, será, por tanto, perpendicular al vector $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ son dos vectores perpendiculares, su producto escalar es cero.

7.9 **1º) ¿Qué vectores son los que dan producto escalar nulo al multiplicarlos por un vector (no nulo) a?**

2º) ¿Cuáles son los que dan producto vectorial nulo (vector cero) al multiplicarlos vectorialmente por este vector a?

(Univ. de Madrid)

1º) Sea $\mathbf{x}$ el vector pedido y α el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{x}|\cdot\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; (\text{si } |\mathbf{a}|\neq 0)\;\; |\mathbf{x}|\cdot\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |\mathbf{x}| = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \text{ es el vector nulo} \\ \text{ó} \\ \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 90^\circ \end{cases}$$

El vector $\mathbf{x}$ *es el vector nulo o cualquier vector perpendicular al vector* $\mathbf{a}$.

2º) $\mathbf{a}\wedge\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{x}|\cdot\operatorname{sen}\alpha = 0 \;\Rightarrow\; (\text{si } |\mathbf{a}|\neq 0)\quad |\mathbf{x}|\cdot\operatorname{sen}\alpha = 0 \;\Rightarrow$

$$\begin{cases} |\mathbf{x}| = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \text{ es el vector nulo} \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen}\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0^\circ \text{ ó } 180^\circ \end{cases}$$

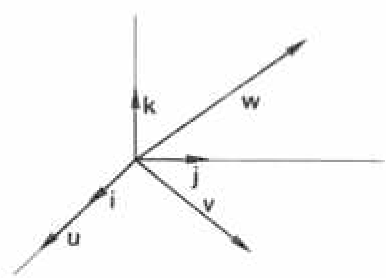
El vector $\mathbf{x}$ *es el vector nulo o cualquier vector paralelo al vector* $\mathbf{a}$.

7.10 **Si u, v y w son tres vectores del espacio vectorial tridimensional, demostrar que**

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$$

(Univ. de Murcia)

Sea $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormal tal que los vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$ son paralelos, y $\mathbf{v}$ está en el plano determinado por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ (o lo que es lo mismo que $\mathbf{v}$ sea combinación lineal de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$).



Se tendrá:

$\mathbf{u} = a\,\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = d\,\mathbf{i} + e\,\mathbf{j} + f\,\mathbf{k}$

$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (b+d)\,\mathbf{i} + (c+e)\,\mathbf{j} + f\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ b+d & c+e & f \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c+e & f \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ b+d & f \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a & 0 \\ b+d & c+e \end{vmatrix} = -(af)\mathbf{j} + (ac+ae)\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = (ac)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{w} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ e & f \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a & 0 \\ d & f \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a & 0 \\ d & e \end{vmatrix} = -(af)\,\mathbf{j} + (ae)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\; \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{w} = -(af)\mathbf{j} + (ac+ae)\mathbf{k} \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta la igualdad pedida.

7.11 **Siendo a y b dos vectores cualesquiera del espacio, probar que**

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

(Univ. de Madrid)

Considerando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{0} - \big(-(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\big) + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{0} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

SEGUNDA SOLUCION:

Sea $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormal tal que los vectores **a** e **i** son paralelos, y **b** está en el plano determinado por **i** y **j**. Se tendrá:

$$\mathbf{a} = m\mathbf{i} \;;\quad \mathbf{b} = n\mathbf{i} + p\mathbf{j} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}-\mathbf{b} = (m-n)\mathbf{i} - p\mathbf{j} \;;\quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = (m+n)\mathbf{i} + p\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m-n & -p & 0 \\ m+n & p & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-n & -p \\ m+n & p \end{vmatrix} \mathbf{k} = (mp - np + mp + np)\mathbf{k} = 2mp\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m & 0 & 0 \\ n & p & 0 \end{vmatrix} = mp\,\mathbf{k} \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta la igualdad a demostrar.

7.12 **Dados los vectores**

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

referidos a un sistema de referencia ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, se pide:

1º) Demostrar que forman un triángulo con el vector $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2º) Hallar el área de dicho triángulo.

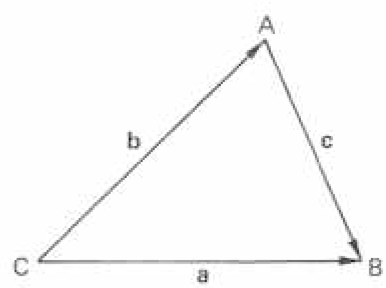
3º) Determinar el área de la proyección del triángulo sobre un plano perpendicular al vector k.

(Univ. de León)

1º) Observando las componentes de los tres vectores, se comprueba que

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$$

esto demuestra que si CB y CA son, respectivamente, dos representantes de los vectores **a** y **b**, AB es un representante del vector **c**.



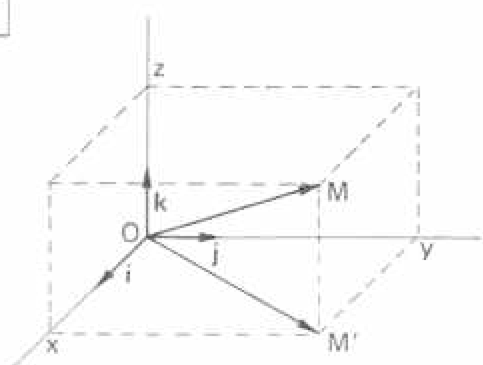
2º) El área del triángulo es igual a

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$$

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\,i - 14\,j - 7\,k$$

$$|a \wedge b| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2}\sqrt{294}}$$

3º) Sea $OM = x\,i + y\,j + z\,k$ un vector cualquiera. Su proyección sobre un plano perpendicular al vector k, por ejemplo el plano determinado por el punto O y paralelo a los vectores i y j, es el vector $OM' = x\,i + y\,j$.



La proyección de los vectores $a = 3i - 2j + k$ y $b = i - 3j + 5k$ sobre un plano perpendicular al vector k son los vectores:

$$a' = 3i - 2j \quad ; \quad b' = i - 3j$$

El área de la proyección del triángulo ABC sobre un plano perpendicular al vector k es el área del triángulo formado sobre a' y b': $S' = \frac{1}{2}\,|a' \wedge b'|$.

$$a' \wedge b' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\,k \quad \Rightarrow \quad |a' \wedge b'| = 7$$

$$\boxed{S' = \frac{7}{2}}$$

7.13 **Si u, v y w son tres vectores del espacio vectorial tridimensional, demostrar que**

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)\,v - (u \cdot v)\,w$$

Si alguno de los vectores es el vector nulo, teniendo en cuenta que el producto vectorial del vector nulo por otro vector es el vector nulo, que el producto escalar del vector nulo por otro vector es cero, que el producto de cero por cualquier vector es el vector nulo, y que el producto de cualquier número real por el vector nulo es el vector nulo, la igualdad del enunciado es inmediata. Por ejemplo, si $u = \mathbf{0}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{0} \wedge (v \wedge w) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{0} \cdot w)v - (\mathbf{0} \cdot v)w = 0v - 0w = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{0} \wedge (v \wedge w) = (\mathbf{0} \cdot w)\,v - (\mathbf{0} \cdot v)\,w$$

Si ninguno de los tres vectores es el vector nulo, eligiendo la base ortonormal $\{i, j, k\}$ definida en el problema 7.10, se tiene:

$$u = a\,i \quad ; \quad v = b\,i + c\,j \quad ; \quad w = d\,i + e\,j + f\,k$$

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = cf\,i - bf\,j + (be - cd)\,k$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ cf & -bf & be-cd \end{vmatrix} = (-abe+acd)\mathbf{j} + (-abf)\mathbf{k} \\ \\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} = (ad)(b\mathbf{i}+c\mathbf{j}) - (ab)(d\mathbf{i}+e\mathbf{j}+f\mathbf{k}) = (acd-abe)\mathbf{j} + (-abf)\mathbf{k} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

7.14 **Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores del espacio vectorial euclídeo tridimensional linealmente independientes. Demostrar que si V es el volumen del paralelepípedo construido sobre tres representantes de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con un origen común, el volumen del paralelepípedo construido sobre tres representantes de $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$, $\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ es V^2.**

Respecto de la base ortonormal $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ definida en el problema 7.10, se tiene:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{v} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{w} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$$

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf = V$$

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} b & 0 \\ d & f \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = cf\mathbf{i} - bf\mathbf{j} + (be-cd)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w}\wedge\mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d & e & f \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} d & f \\ a & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} d & e \\ a & 0 \end{vmatrix} = af\mathbf{j} - ae\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = ac\mathbf{k}$$

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$, $\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ es:

$$[\mathbf{v}\wedge\mathbf{w},\ \mathbf{w}\wedge\mathbf{u},\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}] = \begin{vmatrix} cf & -bf & be-cd \\ 0 & af & -ae \\ 0 & 0 & ac \end{vmatrix} = (acf)^2 = V^2$$

7.15 **Dados los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^3$ denotamos por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ su producto escalar y por $|\mathbf{u}|$ el módulo de $\mathbf{u}$. Establecer la identidad**

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2)$$

(Univ. de Murcia, 1991)

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 \\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \end{array}\right| \Rightarrow |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 \\ (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 \end{array}\right| \Rightarrow |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 \qquad (2)$$

$$(1)-(2): \qquad |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2)$$

CAPITULO 8

ESPACIO AFIN EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL

ESPACIO AFIN EUCLIDEO.

Un espacio afín E asociado a un espacio vectorial euclídeo V, se llama **espacio euclídeo.** O sea, el espacio afín E se llama espacio afín euclídeo si está asociado a un espacio vectorial V en el que se ha definido un producto escalar.

En este capítulo nos ocuparemos del espacio afín euclídeo tridimensional.

Se llama *sistema de referencia ortonormal o métrico,* al conjunto $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, siendo O un punto de E y $\{e_1, e_2, e_3\}$, una base métrica de V, es decir, que:

$$|e_1|^2 = 1 \ ; \ |e_2|^2 = 1 \ ; \ |e_3|^2 = \ ; \ e_1 \cdot e_2 = 0 \ ; \ e_1 \cdot e_3 = 0 \ ; \ e_2 \cdot e_3 = 0$$

(los vectores de la base son unitarios y perpendiculares dos a dos).

Todas las definiciones y fórmulas del capítulo 6, Espacio Afín Tridimensional, son válidas en el Espacio Afín Euclídeo Tridimensional.

Consideraremos, en este capítulo, las ecuaciones de las rectas y los planos expresados respecto de un sistema de referencia ortonormal.

En el espacio afín resolvíamos problemas de intersección y paralelismo de rectas, de planos y de recta y plano. En el espacio afín euclídeo podremos resolver también problemas de distancias, ángulos, ortogonalidad, áreas y volúmenes.

Distancia entre dos puntos: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Las componentes del vector AB son $(x_2 - x_1, \ y_2 - y_1, \ z_2 - z_1)$, el módulo de este vector es igual a la distancia de A a B:

$$\boxed{\text{dist}(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

La distancia entre los puntos $A(3, -2, 1)$ y $B(5, 3, -4)$ es:

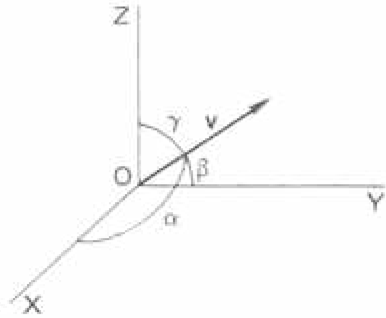
$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(5-3)^2 + (3+2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{2^2+5^2+5^2} = \sqrt{54}$$

La distancia entre puntos verifica las siguientes propiedades:

- $\text{dist}(A, B) \geqslant 0$
- $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$
- $\text{dist}(A, B) = 0 \iff$ A coincide con B
- $\text{dist}(A, B) \leqslant \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B)$

Cosenos directores de un vector. Son los cosenos de los ángulos que un representante del vector forma con los ejes coordenados, o lo que es lo mismo, con los vectores e_1, e_2, e_3 de la base ortonormal del sistema de referencia.

Si α, β y γ son respectivamente los ángulos que el vector $v = (a, b, c)$ forma con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ:



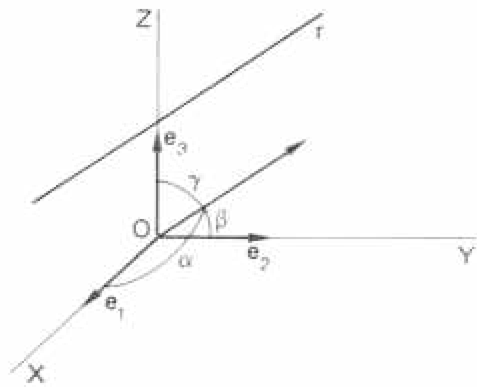
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

verificandose que $\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Cosenos directores de la recta. Son los cosenos de los ángulos que la recta forma con los ejes coordenados. Si la ecuación de la recta es

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

al ser el vector (a, b, c) paralelo a la recta, los cosenos directores de la recta son los cosenos directores del vector (a, b, c):



$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ;$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La ecuación $\boxed{\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_2}{\cos\beta} = \dfrac{z - z_1}{\cos\beta}}$ se llama *ecuación normal de la recta.*

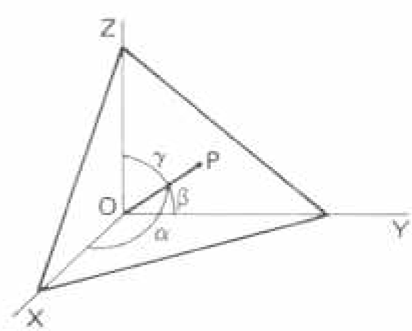
La ecuación normal de la recta $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-6}{12}$ se obtiene dividiendo los denominadores por el módulo del vector (3, 4, 12) . $\sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13$:

$$\frac{x-5}{\frac{3}{13}} = \frac{y+2}{\frac{4}{13}} = \frac{z-6}{\frac{12}{13}}$$

Ecuación normal del plano. Si P es el pie de la perpendicular desde O al plano, dist (O,P) = p, y α, β, γ los ángulos que forma el vector OP con los ejes de coordenadas, la ecuación del plano puede escribirse de la forma:

$$\boxed{\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0}$$

que se llama **ecuación normal** del plano.



Si la ecuación del plano está escrita en la forma $ax + by + cz + d = 0$ para hallar su ecuación normal se dividen todos sus términos por $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ si d es negativo, o por $-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ si d es positivo:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$$

identificando esta ecuación con la ecuación normal:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

son los *cosenos directores* del plano, o cosenos directores de un vector perpendicular al plano.

$$\boxed{\text{El vector } (a, b, c) \text{ es perpendicular al plano } ax+by+cz+d=0}$$

Dado el plano π: $5x - 12y + 84z - 170 = 0$

para hallar sus cosenos directores y la distancia del origen de coordenadas al plano, dividimos por $\sqrt{5^2+12^2+84^2} = 85$:

$$\frac{5}{85}x-\frac{12}{85}y+\frac{84}{85}z-2=0$$

de donde: $\cos\alpha=\frac{5}{85}$; $\cos\beta=-\frac{12}{85}$; $\cos\gamma=\frac{84}{85}$; $\text{dist}(0,\pi)=2$

Angulo de dos rectas. El ángulo de dos rectas es igual al menor de los ángulos que forman sus vectores directores (que son paralelos a ellas). El coseno del ángulo de las dos rectas es igual al valor absoluto del coseno del ángulo de los dos vectores directores.

Sean las rectas r y s:

$$\left.\begin{array}{l} r:\quad (x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \\ s:\quad (x,y,z)=(a',b',c')+\mu(u_1,u_2,u_3)\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} r:\quad \dfrac{x-a}{v_1}=\dfrac{y-b}{v_2}=\dfrac{z-c}{v_3} \\ s:\quad \dfrac{x-a'}{u_1}=\dfrac{y-b'}{u_2}=\dfrac{z-c'}{u_3}\end{array}\right|$$

$$\boxed{\cos(r,s)=\left|\frac{v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\ \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}\right|}$$

$$r:\left|\begin{array}{l} x=a+\lambda v_1 \\ y=b+\lambda v_2 \\ z=c+\lambda v_3\end{array}\right. \qquad s:\left|\begin{array}{l} x=a'+\mu u_1 \\ y=b'+\mu u_2 \\ z=c'+\mu u_3\end{array}\right.$$

Las dos rectas serán perpendiculares si:

$$\boxed{v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3=0}$$

El ángulo de las rectas $r:\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{-3}$ y $s:\left|\begin{array}{l} x=6+4\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=5+m\lambda\end{array}\right.$

es el mismo que el formado por los vectores $(1, 2, -3)$ y $(4, 1, m)$ que son paralelos respectivamente a r y s:

$$\cos(r, s) = \left| \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 3m}{\sqrt{1+4+9}\ \sqrt{16+1+m^2}} \right| = \left| \frac{6-3m}{\sqrt{14}\ \sqrt{17+m^2}} \right|$$

si $m = 2$, las dos rectas serán perpendiculares.

Angulo de dos planos. El ángulo de dos planos es igual al ángulo del rectilíneo del menor de los dos diedros que forman.

Sean los planos:

$$\pi_1: \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$\pi_2: \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

los vectores (a, b, c) y (a', b', c') son respectivamente perpendiculares a los planos π_1 y π_2. El ángulo formado por los dos vectores es igual o suplementario al ángulo formado por los dos planos, el coseno del ángulo de los dos planos es igual al valor absoluto del coseno del ángulo de los dos vectores:

$$\boxed{\cos(\pi_1, \pi_2) = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \right|}$$

Los dos planos serán perpendiculares si $\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$.

El ángulo formado por los planos

$$3x + 4y - 5z + 8 = 0 \quad ; \qquad 2x + y + mz - 8 = 0$$

está determinado por:

$$\cos\alpha = \left| \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot m}{\sqrt{9+16+25}\ \sqrt{4+1+m^2}} \right| = \left| \frac{10-5m}{\sqrt{50}\ \sqrt{5+m^2}} \right|$$

si $10 - 5m = 0$, $m = 2$, los planos son perpendiculares.

Si los planos están dados por sus ecuaciones vectoriales:

$$\pi_1: \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{u} \qquad \pi_2: \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}' + \lambda'\mathbf{v}' + \mu'\mathbf{u}'$$

como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son paralelos al plano π_1, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ será un vector perpendicular a π_1, y, del mismo modo, $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}'$ será un vector perpendicular a π_2, de donde

$$\boxed{\cos(\pi_1, \pi_2) = \left|\cos(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{v}' \wedge \mathbf{u}')\right|}$$

Si los planos vienen dados por sus ecuaciones paramétricas se opera de igual forma.

Sean los planos π_1: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -4, 5)$; $\qquad \pi_2$: $\left| \begin{array}{l} x = 7 - 4\lambda + \mu \\ y = 6 + 3\lambda - 8\mu \\ z = 3 - 2\lambda + 5\mu \end{array} \right.$

Los vectores $(-1, 3, 2)$ y $(2, -4, 5)$ son paralelos a π_1. Multiplicando vectorialmente estos vectores obtendremos un vector perpendicular a π_1:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 23\,\mathbf{e}_1 + 9\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3$$

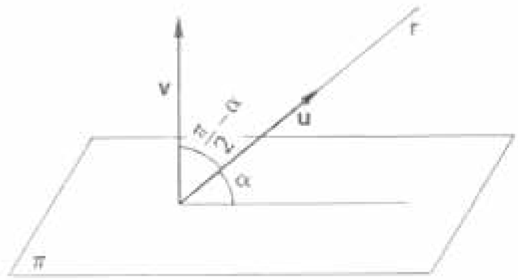
Los vectores $(-4, 3, -2)$ y $(1, -8, 5)$ son paralelos a π_2. Su producto vectorial nos dará un vector perpendicular a π_2:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -e_1 + 18\,e_2 + 29\,e_3$$

de donde:

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \left| \frac{23\cdot(-1)+9\cdot 18+(-2)\,29}{\sqrt{23^2+9^2+2^2}\;\sqrt{1+18^2+29^2}} \right| = \frac{81}{\sqrt{614}\;\sqrt{1166}} = \frac{81}{\sqrt{715924}}$$

Angulo de recta y plano. Dadas las ecuaciones de la recta y el plano, podremos obtener dos vectores, uno que es paralelo a la recta y otro perpendicular al plano. El ángulo que forman estos dos vectores es complementario del que forman la recta y el plano siendo, por tanto, el seno del ángulo pedido igual al valor absoluto del coseno del ángulo de los dos vectores.



Si $r: \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ y

$\pi: \; ax + by + cz + d = 0$

el vector $\mathbf{u} = (m, n, p)$ es paralelo a la recta y el vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ es perpendicular al plano:

$$\boxed{\operatorname{sen}(r, \pi) = |\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \left| \frac{ma + nb + pc}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\;\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|}$$

La recta será paralela al plano si $\boxed{ma + nb + pc = 0}$

El ángulo formado por la recta r: $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-8}{3}$, y el plano π: $3x - 6y + mz - 8 = 0$, está determinado por la fórmula:

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \left| \frac{2\cdot 3 + (-1)(-6) + 3m}{\sqrt{4+1+9}\;\sqrt{9+36+m^2}} \right| = \frac{|12+3m|}{\sqrt{14}\;\sqrt{45+m^2}}$$

si $12 + 3m = 0$, $m = -4$, la recta es paralela al plano.

Distancia de un punto a un plano. La distancia del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ al plano

$$\pi: \; ax + by + cz + d = 0$$

es:

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

La distancia del punto $P(2, 5, -6)$ al plano π: $3x - 4y + 12z - 5 = 0$ es

$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \frac{|3\cdot 2 - 4\cdot 5 + 12(-6) - 5|}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{91}{13} = 7$$

Todo plano π divide el espacio en dos semiespacios. Si en la fórmula que nos da la distancia de un punto al plano π prescindimos del valor absoluto, todos los punto que están en un semiespacio tienen distancia positiva y todos los puntos del otro semiespacio tienen distancia negativa.

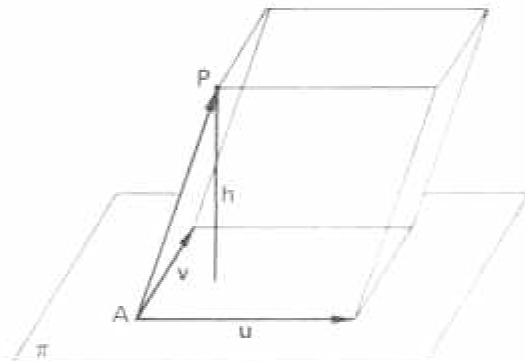
Dado el plano π: $3x - y + 2z - 4 = 0$ y los puntos $P(2, 3, -4)$ y $Q(5, -2, 6)$, ¿están los puntos P y Q en el mismo semiespacio respecto del plano π?

$$d(P, \pi) = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2(-4) - 4}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{-9}{\sqrt{14}} < 0 \ ; \ d(Q, \pi) = \frac{3 \cdot 5 - 1(-2) + 2 \cdot 6 - 4}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{25}{\sqrt{14}} > 0$$

Los puntos P y Q están en distintos semiespacios respecto del plano π.

Si la ecuación del plano π viene dada por su ecuación vectorial: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$, conocemos un punto A del plano, extremo del vector $OA = \mathbf{a}$, y dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del plano. Sea el punto P que nos determina el vector $OP = \mathbf{p}$:

El producto mixto de los vectores $AP = \mathbf{p} - \mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ nos da el volumen del paralelepípedo de la figura. El módulo del producto vectorial $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ es igual al área de la base del paralelepípedo. La distancia del punto P al plano π es igual a la altura del paralelepípedo, que es igual al volumen dividido por el área de la base:



$$\boxed{\text{dist}(P, \pi) = \left| \frac{[\mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|} \right|}$$

Si el plano está dado por sus ecuaciones paramétricas, conocemos un punto del plano y dos vectores del plano (o paralelos a él) y se procede de igual modo.

Cálculo de la distancia del punto $P(3, 2, 5)$ al plano π: $(x, y, z) = (4, 1, 3) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(3, 1, 1)$.

Al ser $A(4, 1, 3)$ un punto del plano, $AP = (3-4, 2-1, 5-3) = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ y $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$:

$$[\mathbf{p} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2e_1 - 5e_2 - e_3 \Rightarrow$$

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$$

de donde:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{9}{\sqrt{30}}$$

Planos bisectores de un diedro.

Sean π_1: $ax + by + cz + d = 0$; π_2: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

las ecuaciones de los planos que forman el diedro y $A(x, y, z)$ el punto genérico del plano bisector. Las distancias del punto A a los planos π_1 y π_2 son iguales:

$$\boxed{\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}}$$

Tomando los dos signos, por separado, obtendremos las ecuaciones de los dos planos bisectores correspondientes a los dos diedros que forman los planos π_1 y π_2. Los dos planos bisectores son perpendiculares.

Sea obtener los planos bisectores de los diedros determinados por los planos:

$$\pi_1: \ x+2y+2z-6=0 \ ; \quad \pi_2: \ 3x+4y+12z-1=0$$

$$\frac{x+2y+2z-6}{\sqrt{1+4+4}} = \pm \frac{3x+4y+12z-1}{\sqrt{9+16+144}} \Rightarrow \frac{x+2y+2z-6}{3} = \pm \frac{3x+4y+12z-1}{13} \Rightarrow$$

$$13x+26y+26z-78 = \pm(9x+12y-36z-3) \Rightarrow \begin{cases} 13x+26y+26z-78 = 9x+12y-36z-3 \\ 13x+26y+26z-78 = -(9x+12y-36z-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x+14y+62z-75=0 \\ 22x+38y-10z-81=0 \end{cases}$$

Distancia entre dos planos paralelos. Distancia entre los planos paralelos:

$$\pi_1: \ ax+by+cz+d=0 \qquad \pi_2: \ ax+by+cz+d'=0$$

$$\boxed{\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d'-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

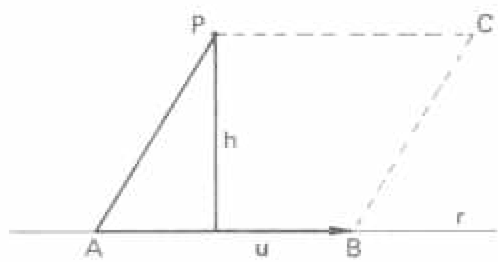
Cálculo de la distancia entre los planos paralelos:

$$\pi_1: \ 3x+4y-12z+5=0 \qquad \pi_2: \ 6x+8y-24z-14=0$$

Escrito el plano π_2 de la forma: $3x+4y-12z-7=0$, se tiene

$$\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-7-5|}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{12}{13}$$

Distancia de un punto P a una recta r. Si la recta r está dada por su ecuación vectorial, $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{u}$, o por su ecuación continua o por sus ecuaciones paramétricas, conocemos un punto A de la recta y un vector $\mathbf{u}$ paralelo a la recta.



El punto P determina el vector $OP = \mathbf{p}$, y el vector $\mathbf{a}$ el punto A de la recta tal que $OA = \mathbf{a}$. Los puntos A y P determinan el vector $AP = \mathbf{p} - \mathbf{a}$.

El módulo del producto vectorial $AP \wedge \mathbf{u}$ es igual al área del paralelogramo ABCP de la figura. Si dividimos este área por la longitud de la base, igual al módulo del vector $\mathbf{u}$, tendremos la altura del paralelogramo, que es igual a la distancia del punto P a la recta r.

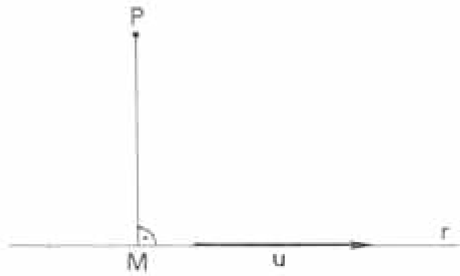
$$\boxed{\operatorname{dist}(P, r) = \frac{|(\mathbf{p}-\mathbf{a}) \wedge \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}}$$

Cálculo de la distancia del punto $P(2,-1,1)$ a la recta $r: (x,y,z) = (1,-3,4) + \lambda(-2,4,3)$

La recta r pasa por el punto $A(1,-3,4)$ y es paralela al vector $\mathbf{u} = (-2,4,3)$. $AP = (2-1, -1+3, 1-4) = (1,2,-3)$.

$$(\mathbf{p}-\mathbf{a}) \wedge \mathbf{u} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 18\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$$

$$|(\mathbf{p}-\mathbf{a}) \wedge \mathbf{u}| = \sqrt{18^2+3^2+8^2} = \sqrt{397}, \qquad |\mathbf{u}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29} \Rightarrow \operatorname{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{397}}{\sqrt{29}}$$



Otro modo es el siguiente: Si las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases}$$

sea a el valor de λ que nos da las coordenadas del punto M, pie de la perpendicular a la recta desde el punto P. Expresando que los vectores PM y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ son perpendiculares, su producto escalar es nulo, obtendremos una ecuación lineal en a. Hallado el valor de a, se sustituye en las ecuaciones de la recta y tendremos las coordenadas de M. La distancia de P a r es la distancia del punto P al punto M.

Este método nos facilita hallar la ecuación de la perpendicular desde P a r, pues es la recta que pasa por los puntos P y M.

Calcular razonadamente la distancia del punto $P(3, -2, -1)$ a la recta

$$r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

y las ecuaciones de la perpendicular de P a r.

(Univ. de Granada)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2y + 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 5 \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Si a es el valor de λ que nos da las coordenadas del punto M, pie de la perpendicular de P a r, o sea $M(2a+5, a, 3)$, el vector $PM = (2a+2, a+2, 4)$ es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$ que es paralelo a la recta. El producto escalar de estos dos vectores es nulo:

$$\mathbf{u} \cdot PM = 0 \Rightarrow 2(2a+2) + 1 \cdot (a+2) + 0 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

de donde las coordenadas de M son: $\left(-\frac{12}{5} + 5, -\frac{6}{5}, 3\right) = \left(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5}, 3\right)$

La distancia de P a r es la distancia entre los puntos P y M:

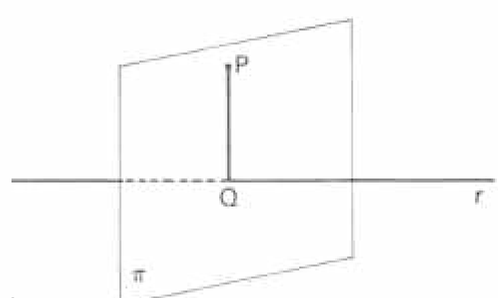
$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, M) = \sqrt{\left(\frac{13}{5} - 3\right)^2 + \left(-\frac{6}{5} + 2\right)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 16} = \frac{\sqrt{420}}{5}$$

La perpendicular de P a r es la recta que pasa por los puntos $P(3, -2, -1)$ y $M\left(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5}, 3\right)$:

$$\frac{x-3}{\frac{13}{5} - 3} = \frac{y+2}{-\frac{6}{5} + 2} = \frac{z+1}{3+1} \Rightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{20}$$

También se puede obtener la distancia del punto P a la recta r, trazando un plano π que contenga a P y sea perpendicular a r. La intersección de r con π nos dará el punto Q, se tendrá que

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q).$$



Distancia entre una recta y un plano paralelo a la recta. La distancia entre la recta:

$$r: \quad \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

y el plano $\qquad \pi: \quad ax + by + cz + d = 0$

que son paralelos $(am + bn + cp = 0)$, es igual a la distancia de un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo $A(x_1, y_1, z_1)$, al plano π:

$$\boxed{\text{dist}(r, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

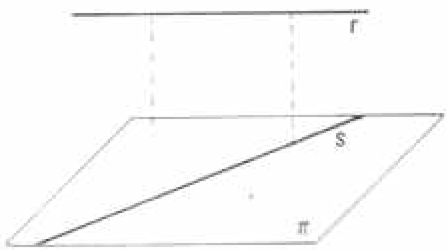
Distancia entre dos rectas paralelas. Si las rectas r y r' son paralelas, la distancia entre r y r' es igual a la distancia de un punto cualquiera de r a la recta r'.

Se puede obtener también trazando un plano perpendicular a ambas rectas, la distancia entre r y r' es igual a la distancia entre los puntos de intersección del plano con r y r'.

Distancia entre dos rectas que se cruzan. Se define como distancia entre dos rectas la menor de las distancias entre cada par de puntos, uno de cada recta.

El cálculo de la distancia entre las rectas r y s se hace de la siguiente forma:

- se obtiene la ecuación del plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.
- la distancia entre un punto cualquiera de la recta r y el plano π es la distancia entre ambas rectas.



Cálculo de la distancia entre las tectas $\quad r: \ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s: \begin{cases} 2x - 3y - 4z - 2 = 0 \\ x + 2y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$

Todos los planos que contienen a la recta s pertenecen al haz de planos de eje la recta s:

$$\lambda(2x - 3y - 4z - 2) + \mu(x + 2y - 3z + 8) = 0 \Rightarrow (2\lambda + \mu)x + (-3\lambda + 2\mu)y + (-4\lambda - 3\mu)z - 2\lambda + 8\mu = 0 \qquad (1)$$

El vector $(3, -2, 1)$ es paralelo a la recta r y el vector $(2\lambda + \mu, -3\lambda + 2\mu, -4\lambda - 3\mu)$ es perpendicular al plano. Si la recta r y el plano son paralelos, los dos vectores anteriores son perpendiculares, su producto escalar es nulo:

$$3(2\lambda + \mu) - 2(-3\lambda + 2\mu) + 1\cdot(-4\lambda - 3\mu) = 0 \Rightarrow 8\lambda - 4\mu = 0 \Rightarrow \mu = 2\lambda$$

Llevando este valor a (1) obtenemos el plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r:

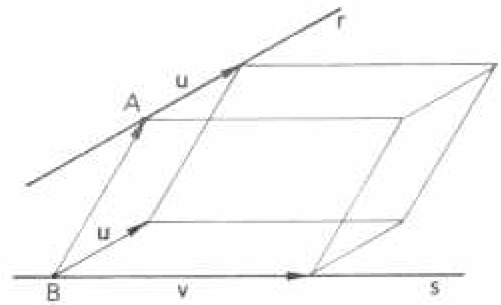
$$\lambda(2x - 3y - 4z - 2) + 2\lambda(x + 2y - 3z + 8) = 0$$

dividiendo por λ y simplificando: $\quad \pi: \ 4x + y - 10z + 14 = 0$

La distancia del punto $(2, -1, 0)$ de r al plano π es igual a la mínima distancia entre r y s:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|4\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 10\cdot 0 + 14|}{\sqrt{16 + 1 + 100}} = \frac{21}{\sqrt{117}}$$

Si de la recta r conocemos el punto A y su vector director $\mathbf{u}$, y de la recta s el punto B y su vector director $\mathbf{v}$, el volumen del paralelepípedo de la figura es igual al producto mixto de los vectores $BA = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Si este volumen lo dividimos por el área de la base, que es igual al módulo del producto vectorial de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tendremos la altura del paralelepípedo, que es igual a la distancia entre r y s:



$$\boxed{\operatorname{dist}(r, s) = \frac{|[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]|}{|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|}}$$

Sean las retas $\quad r: \ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1} \quad ; \quad s: \ (x, y, z) = (28, -18, 0) + \lambda(-1, 2, 1)$

El punto $A(2, -1, 0)$ pertenece a r, siendo $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$ su vector director, y el punto $B(28, -18, 0)$ pertenece a s, siendo $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$ su vector director.

$$BA = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (2 - 28, -1 + 18, 0 - 0) = (-26, 17, 0)$$

$$[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \begin{vmatrix} -26 & 17 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -26 & 17 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -26 & 17 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 36$$

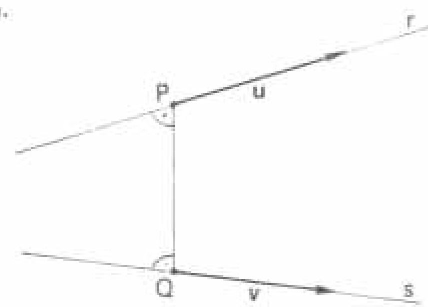
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

de donde: $$\operatorname{dist}(r, s) = \frac{36}{\sqrt{16 + 16 + 16}} = \frac{36}{4\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = x_2 + \mu v_1 \\ y = y_2 + \mu v_2 \\ z = z_2 + \mu v_2 \end{cases}$$



y sean P y Q los puntos de intersección de la perpendicular común con las rectas r y s.

Si a y b son, respectivamente, los valores de λ y μ que nos dan los puntos P y Q, o sea,

$$P(x_1 + a u_1, y_1 + a u_2, z_1 + a u_3) \quad \text{y} \quad Q(x_2 + b v_1, y_2 + b v_2, z_2 + b v_3),$$

el vector PQ es perpendicular a la recta r, y por lo tanto a su vector director $\mathbf{u}$, y también es perpendicular a la recta s y a su vector director $\mathbf{v}$. Los productos escalares del vector PQ con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ serán nulos:

$$\left.\begin{aligned} PQ \cdot \mathbf{u} = 0 \\ PQ \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}\right\}$$

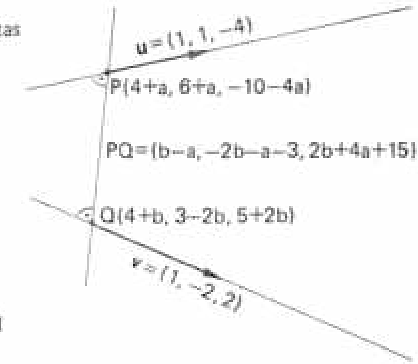
Este sistema nos dará los valores de a y b.

Conocidas las coordenadas de P y Q, la recta PQ es la perpendicular común buscada.

Este método nos permite hallar también la mínima distancia entre las rectas r y s: $\operatorname{dist}(r, s) = \operatorname{dist}(P, Q)$.

Cálculo de la perpendicular común y de la mínima distancia de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -10-4\lambda \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 3-2\mu \\ z = 5+2\mu \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} PQ\cdot u = 0 \\ \\ PQ\cdot v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1(b-a)+1(-2b-a-3)-4(2b+4a+15)=0 \\ \\ 1(b-a)-2(-2b-a-3)-2(2b+4a+15)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -9b-18a-63=0 \\ \\ 9b+9a+36=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} b+2a=-7 \\ \\ b+a=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a=-3,\ b=-1$$

valores que sustituidos en las coordenadas de P y Q nos dan: $P(1, 3, 2)$ y $Q(3, 5, 3)$.

Ecuación de la perpendicular común $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-3}{5-3} = \dfrac{z-2}{3-2}$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$

Mínima distancia de r y s: $\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2+(5-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

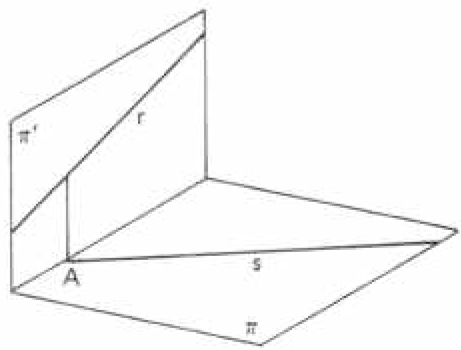
Otro método de obtener la perpendicular común a dos rectas r y s es el siguiente:

– se halla la ecuación del plano π que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

– se halla la ecuación del plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

– la intersección del plano π' con la recta s nos da el punto A.

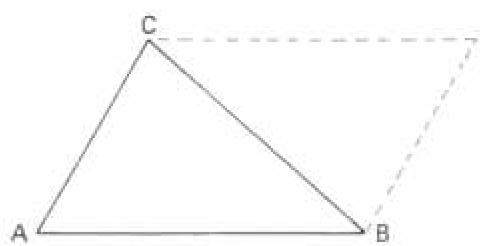
– la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π es la perpendicular común a r y s.



Este método suele resultar mucho más laborioso que el anterior, el lector puede comprobarlo resolviendo el último ejemplo de este modo.

Area del triángulo en el espacio. Sea el triángulo de vertices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$. El módulo del producto vectorial de los vectores $AB = (b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$ y $AC = (c_1-a_1,\ c_2-a_2,\ c_3-a_3)$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores AB y AC, igual al doble del área del triángulo ABC.

$$\boxed{\text{área}\ (ABC) = \frac{1}{2}\left|AB \wedge AC\right|}$$



Cálculo del área del triángulo de vértices $A(3, 2, -5)$, $B(4, 1, -2)$ y $C(6, 7, 3)$.

$$AB = (4-3,\ 1-2,\ -2+5) = (1, -1, 3) \quad ; \quad AC = (6-3,\ 7-2,\ 3+5) = (3, 5, 8)$$

$$AB \wedge AC \equiv \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -23e_1 + e_2 + 8e_3$$

$$\text{área}\ (ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{23^2+1+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{594}$$

Volumen del tetraedro. Sea el tetraedro de vértices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$. El valor absoluto del producto mixto de los vectores

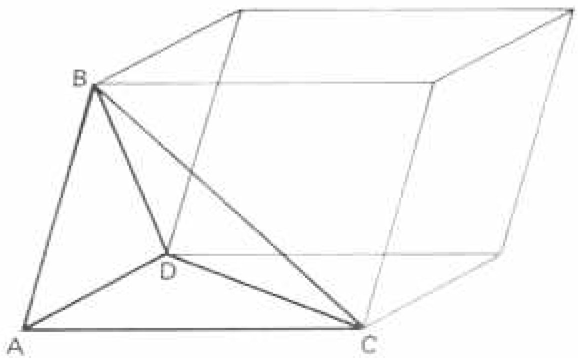
$$AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3),$$

$$AC = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3),$$

$$AD = (d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3)$$

es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores AB, AC y AD.

El volumen del tetraedro ABCD es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo:



$$\text{Volumen (ABCD)} = \frac{1}{6}\left|[AB, AC, AD]\right| = \frac{1}{6}\text{ valor absoluto de }\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

Cálculo del volumen del tetraedro de vértices los puntos $A(2, -1, 4)$, $B(4, 5, 0)$, $C(3, 7, -2)$ y $D(0, 1, 5)$.

$AB = (4-2, 5+1, 0-4) = (2, 6, -4)$; $AC = (3-2, 7+1, -2-4) = (1, 8, -6)$; $AD = (0-2, 1+1, 5-4) = (-2, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 8 & -6 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 72 - 8 - 64 + 24 - 6 = 34 \Rightarrow \text{Volumen tetraedro ABCD} = \frac{1}{6}\,34 = \frac{17}{3}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos en el Espacio Afín Euclídeo Tridimensional

	Paralelismo	Perpendicularidad
Recta y Recta: $r_1: \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$ $r_2: \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{y-y_2}{v_2} = \frac{z-z_2}{v_3}$	$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$	$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$
Plano y Plano: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$
Recta y Plano: $r: \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$ $\pi: ax + by + cz + d = 0$	$a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = 0$	$\frac{a}{u_1} = \frac{b}{u_2} = \frac{c}{u_3}$

PROBLEMAS

8.1 **Razonar por qué la recta de dirección $(1, -2, m)$ es perpendicular al plano**

$$\pi: \quad x - 2y + mz + n = 0$$

(Univ. de Islas Baleares, 1991)

El vector $(1, -2, m)$ será perpendicular al plano $x - 2y + mz + n = 0$, si dicho vector es perpendicular a cualquier vector AB del plano.

Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos cualesquiera del plano, que determinan un vector genérico del plano:

– por estar el punto A en el plano π, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano π:

$$x_1 - 2y_1 + mz_1 + n = 0 \qquad (1)$$

– por estar el punto B en el plano π:

$$x_2 - 2y_2 + mz_2 + n = 0 \qquad (2)$$

– restando (1) de (2): $\quad (x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1) + m(z_2 - z_1) = 0 \qquad (3)$

Esta igualdad nos dice que el vector $(1, -2, m)$ es perpendicular al vector

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ya que, según (3), el producto escalar de ambos vectores es nulo.

Está demostrado que la recta de dirección $(1, -2, m)$ es perpendicular al plano π.

8.2 **Determinar b para que la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z}{6}$ no corte al plano**

$$2x - 4y + 5z = 6.$$

(Univ. de León, 1991)

El vector $(3, b, 6)$ es paralelo a la recta, y el vector $(2, -4, 5)$ es perpendicular al plano.

Si la recta no corta al plano, la recta y plano son paralelos, y los vectores anteriores serán perpendiculares. Su producto escalar será nulo:

$$3 \cdot 2 + b(-4) + 6 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4b = 36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 9}$$

8.3 **Hallar una ecuación continua de la recta que es paralela a los planos**

$$x-3y+z=0 \qquad y \qquad 2x-y+3z-5=0$$

y pasa por el punto $(2,-1,5)$.

(Univ. de Extremadura, 1991)

Los vectores $(1,-3,1)$ y $(2,-1,3)$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos dados, el vector $(1,-3,1)\wedge(2,-1,3)$ es un vector paralelo a ambos planos, y paralelo, por tanto a la recta pedida.

$$(1,-3,1)\wedge(2,-1,3) \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8i-j+5k$$

La recta pedida es la recta que pasa por el punto $(2,-1,5)$ y es paralela al vector $(8,1,-5)$:

$$\boxed{\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-5}}$$

8.4 **Sean los puntos $A(0,3,-2)$ y $B(1,5,0)$. Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto A.**

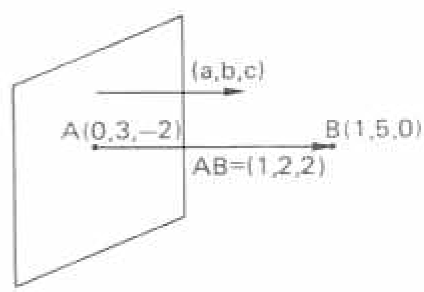
(Univ. de Zaragoza)

La ecuación del plano pedido, por pasar por el punto $A(0,3,-2)$, será de la forma:

$$a(x-0)+b(y-3)+c(z+2)=0 \qquad (1)$$

Este plano es perpendicular al vector (a,b,c),

y como el vector $AB=(1-0,5-3,0+2)=(1,2,2)$ es perpendicular también al plano, los vectores (a,b,c) y $(1,2,2)$ son paralelos, de donde:



$$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{2} \Rightarrow b=2a,\ c=2a$$

llevando estos valores a (1): $ax+2a(y-3)+2a(z+2)=0$ dividiendo por a y simplificando, queda:

$$\boxed{x+2y+2z-2=0}$$

que es la ecuación pedida

8.5 **Hallar el plano que pasa por los puntos $A(0,2,0)$ y $B(1,0,1)$ y es perpendicular al plano**

$$x-2y-x=7.$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $\qquad ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$ el plano pedido.

— por pasar por el punto $A(0,2,0)$: $\qquad 2b+d=0 \qquad (2)$

— por pasar por el punto $B(1,0,1)$: $\qquad a+c+d=0 \qquad (3)$

— por ser perpendicular al plano $x - 2y - z = 7$: $\quad a - 2b - c = 0 \qquad (4)$

Las cuatro ecuaciones (1), (2), (3) y (4) forman un sistema homogéneo de cuatro incógnitas, a, b, c y d. Este sistema tendrá solución distinta de la trivial si es nulo el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y-2 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad 4x + 2(y-2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{2x + y - 2 = 0}$$

8.6 **Obtener la ecuación del plano que contiene a la recta**

$$r: \; \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z - 3$$

y es perpendicular al plano π de ecuación

$$x - y + 2z - 1 = 0$$

(Univ. de La Laguna)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z - 3 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = z - 3 \\[2ex] \dfrac{y+2}{3} = z - 3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x - 2z + 5 = 0 \\[2ex] y - 3z + 11 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

el haz de planos que contiene a la recta r tiene por ecuación:

$$a(x - 2z + 5) + b(y - 3z + 11) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax + by + (-2a - 3b)z + 5a + 11b = 0 \qquad (1)$$

El vector $(a, b, -2a - 3b)$ es perpendicular a este plano, y el vector $(1, -1, 2)$ es perpendicular al plano π. Si estos dos planos son perpendiculares, los vectores $(a, b, -2a - 3b)$ y $(1, -1, 2)$ también son perpendiculares, de donde:

$$a - b + 2(-2a - 3b) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3a - 7b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{7b}{3}$$

llevando este valor a la primera (o segunda) ecuación de (1):

$$-\frac{7b}{3}(x - 2z + 5) + b(y - 3z + 11) = 0$$

(multiplicando por $-\dfrac{3}{b}$):

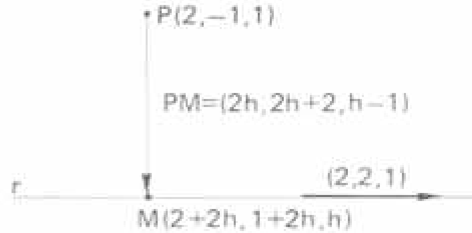
$$7(x - 2z + 5) - 3(y - 3z + 11) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{7x - 3y - 5z + 2 = 0}$$

8.7 **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta r**

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=z$$

(Univ. de Baleares)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r.



$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

(a cada valor de λ corresponde un punto de r)

Sea h el valor de λ que nos da el pie M de la perpendicular de P a r: $M(2+2h,\ 1+2h,\ h)$.

El vector $PM=(2+2h-2,\ 1+2h+1,\ h-1)=(2h,\ 2h+2,\ h-1)$ es perpendicular a r, y como el vector $(2,2,1)$ es paralelo a r, los vectores $(2h,\ 2h+2,\ h-1)$ y $(2,2,1)$ son perpendiculares, de donde:

$$2(2h)+2(2h+2)+1(h-1)=0 \Rightarrow h=-\frac{1}{3}$$

sustituyendo este valor en $M(2+2h,\ 1+2h,\ h)$ resultan las coordenadas de M: $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Las ecuaciones de la recta PM son:

$$\frac{x-2}{\frac{4}{3}-2}=\frac{y+1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{z-1}{-\frac{1}{3}-1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}}$$

8.8 **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta**

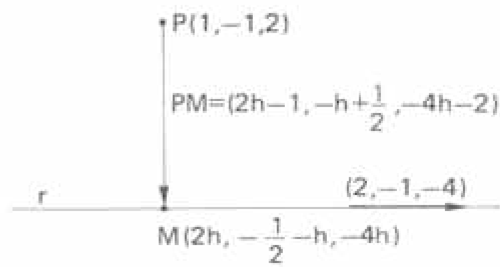
$$r: \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x \quad\quad +z=0 \end{cases}$$

(Univ. de Barcelona)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de r:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ 2x \quad +z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x-2y-2x=1;\quad y=-\frac{1}{2}-\frac{x}{2} \\ z=-2x \end{array}$$

haciendo $x=2\lambda$:
$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\frac{1}{2}-\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$



Sea h el valor de λ que nos da el pie M de la perpendicular de P a r: $M(2h, -\frac{1}{2} - h, -4h)$.

El vector $PM = (2h-1, -h + \frac{1}{2}, -4h-2)$ es perpendicular a r, y como el vector $(2, -1, -4)$ es paralelo a r, los vectores $(2h-1, -h+\frac{1}{2}, -4h-2)$ y $(2, -1, -4)$ son perpendiculares, su producto escalar será nulo:

$$2(2h-1) + (-1)(-h + \frac{1}{2}) + (-4)(-4h-2) = 0 \Rightarrow h = -\frac{11}{42}$$

sustituyendo este valor en $M(2h, -\frac{1}{2} - h, -4h)$ resulta $M(-\frac{11}{21}, -\frac{5}{21}, \frac{22}{21})$

Las ecuaciones de la recta PM son:

$$\frac{x-1}{-\frac{11}{21}-1} = \frac{y+1}{-\frac{5}{21}+1} = \frac{z-2}{\frac{22}{21}-2} \Rightarrow \frac{x-1}{-\frac{32}{21}} = \frac{y+1}{\frac{16}{21}} = \frac{z-2}{-\frac{20}{21}} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{-8} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-5}}$$

8.9 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(3,-2,-1)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$$

¿Falta alguna condición en el enunciado?

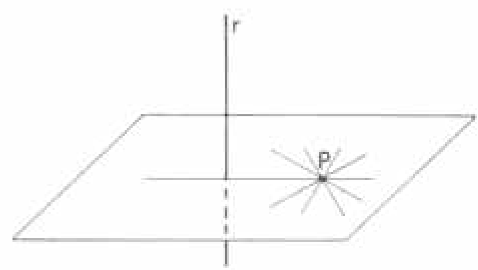
(Univ. de Granada)

El ángulo que forman dos rectas en el espacio es igual al ángulo que forman dos vectores paralelos a las rectas.

Todas las rectas que pasen por el punto P y estén en el plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r, cumplen las condiciones del enunciado. Hay, por tanto, infinitas rectas que pasan por el punto P y son perpendiculares a la recta r.

Hay una sola recta que pasa por P y **corta** perpendicularmente a r.

Resolveremos el problema en ambos casos



La recta r, de ecuaciones $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ es paralela al vector $(2, 3, -1)$. El plano π que pasa por P y es perpendicular a r se obtiene de la siguiente forma:

– por pasar por $P(3,-2,-1)$ su ecuación será: $a(x-3) + b(y+2) + c(z+1) = 0$ (1)

– por ser perpendicular a r, como el vector $(2, 3, -1)$ es paralelo a r y el vector (a, b, c) es perpendicular a π, si t y π son perpendiculares, los vectores $(2, 3, -1)$ y (a, b, c) son paralelos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{-1} \Rightarrow a = -2c, \; b = -3c$$

llevando este valor a (1) nos queda:

$$-2c(x-3) - 3c(y+2) + c(z+1) = 0$$

dividiendo por $-c$: $2(x-3) + 3(y+2) - (z+1) = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z - 1 = 0$ (2)

La intersección de este plano con cualquier otro plano que pase por el punto P nos dará una recta que pasa por P y es perpendicular a r:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ m(x-3) + n(y+2) + q(z+1) = 0 \end{array}\right\}}$$

para valores de m, n, q que no verifiquen: $\frac{m}{2} = \frac{n}{3} = \frac{q}{-1}$, pues en este caso el segundo plano coincidiría con el primero.

Si la recta pedida corta a r se opera como en los dos problemas anteriores, obteniendose:

$$\boxed{\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{4}}$$

8.10 **Determinar la posición relativa de la recta r:** $\left|\begin{array}{l} 3y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{array}\right.$ **y la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que determina sobre los ejes de coordenadas segmentos de longitud 1, 2 y 3 respectivamente.**

(Univ. de Madrid)

La ecuación del plano que determina sobre los ejes segmentos de longitud 1, 2 y 3 es:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

El vector (6, 3, 2) es perpendicular a este plano. La recta que pasa por el punto (0, 0, 0) y es perpendicular al plano, es la recta que pasa por el punto (0, 0, 0) y es paralela al vector (6, 3, 2)

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 + 6\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x - 6y = 0 \\ 2y - 3y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right.$$

Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} 3y + 2z = 4 \\ x = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = 2 - \frac{3}{2}\,y \\ x = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2\mu \\ z = 2 - 3\mu \end{array}\right| \Rightarrow$$ la recta r es paralela al vector (0, 2, −3)

Las rectas estudiadas son paralelas a los vectores (6, 3, 2) y (0, 2, −3), luego no son paralelas: (6, 3, 2) ≠ k(0, 2, −3) cualquiera que sea k. Si las rectas no son paralelas, se cortarán o se cruzarán.

El punto A(0, 0, 2) pertenece a la recta r y O(0, 0, 0) a la otra recta: El vector OA = (0, 0, 2) será o no combinación lineal de los vectores (6, 3, 2) y (0, 2, −3) según que las rectas se corten o no se corten:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

8.11 **Hallar las ecuaciones de la recta t que pasa por el punto P(1, 1, 1), está contenida en el plano**

$$\pi:\ x + y + z - 3 = 0$$

y es perpendicular a la recta

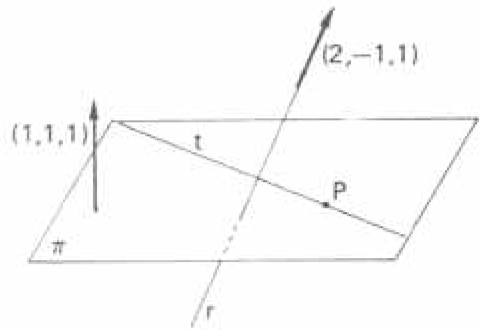
$$r: \left|\begin{array}{l} x = 2z + 3 \\ y = -z + 4 \end{array}\right.$$

(Univ. de Valladolid)

El vector $(1, 1, 1)$ es perpendicular al plano π.

Haciendo, en las ecuaciones de r, $z = \lambda$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de r:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \text{esta recta es paralela al vector } (2,-1,1)$$



El punto P está en el plano π (si no se cumple esta condición la recta t no podría estar contenida en el plano π), y el decir que la recta t está en el plano π equivale a decir que t es paralela a π.

— por pasar la recta t por el punto $P(1, 1, 1)$, sus ecuaciones (paramétricas) serán de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + b\lambda \\ z = 1 + c\lambda \end{array}\right| \quad (1) \qquad \text{siendo esta recta paralela al vector } (a,b,c)$$

— por ser paralela la recta t al plano π, los vectores $(1, 1, 1)$ y (a, b, c) son perpendiculares, de donde:

$$a + b + c = 0 \qquad (2)$$

— por ser la recta t perpendicular a la recta r, los vectores (a, b, c) y $(2, -1, 1)$ son perpendiculares:

$$2a - b + c = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -c \\ 2a - b = -c \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} -c & 1 \\ -c & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2c}{-3}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 2 & -c \end{vmatrix}}{-3} = \frac{c}{-3} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a = 2k \\ b = k \\ c = -3k \end{array}\right.$$

dando a k el valor 1 y sustituyendo en (1) obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{array}} \quad \text{(ecuaciones paramétricas de t)} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}} \text{ (ec. cont.)}$$

8.12 **Hallar las ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$, es paralela al plano**

$$\pi: 2x + y - z - 3 = 0$$

y es perpendicular a la recta

$$r: \left|\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{array}\right.$$

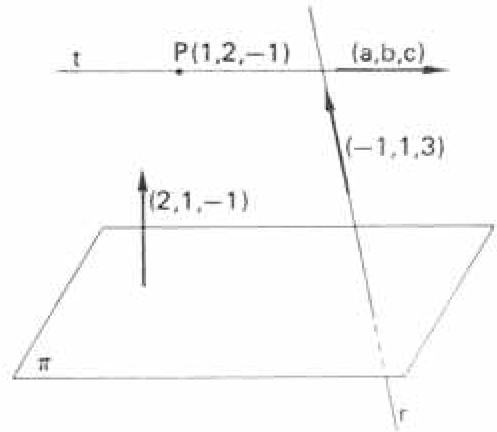
(Univ. de Madrid)

El vector $(2, 1, -1)$ es perpendicular al plano π, y el vector $(-1, 1, -3)$ es paralelo a la recta r.

— Las ecuaciones de la recta t, por pasar por el punto $P(1, 2, -1)$, serán de la forma:

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+1}{c} \qquad (1)$$

siendo (a, b, c) un vector paralelo a esta recta.



—por ser la recta t paralela al plano π, los vectores (a, b, c) y (2, 1, −1) serán perpendiculares, su producto escalar será nulo:

$$2a + b - c = 0 \qquad (2)$$

—por ser la recta t perpendicular a la recta r, los vectores (a, b, c) y (−1, 1, −3) serán perpendiculares, de donde:

$$-a + b - 3c = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b - c = 0 \\ -a + b - 3c = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a + b = c \\ -a + b = 3c \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} c & 1 \\ 3c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2c}{3}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & c \\ -1 & 3c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7c}{3} \Rightarrow \text{(haciendo } c = 3k) \quad \left| \begin{array}{l} a = -2k \\ b = 7k \\ c = 3k \end{array}\right.$$

sustituyendo estos valores en (1):

$$\frac{x-1}{-2k} = \frac{y-2}{7k} = \frac{z+1}{3k} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{3}}$$

que es la ecuación pedida.

8.13 Dados el plano $\pi: \; 2x + y - z - 5 = 0$ y el punto A(1, 2,−1), se pide:

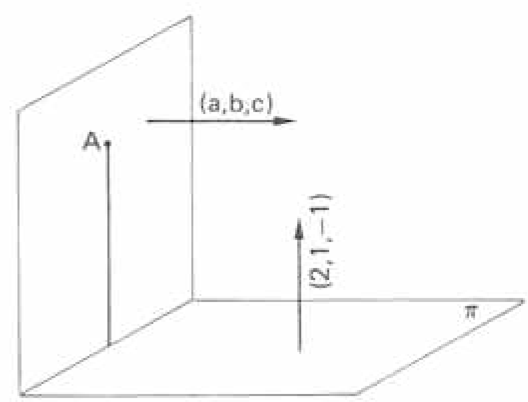
a) la ecuación del plano perpendicular al dado que pase por A ;

b) las ecuaciones de la recta perpendicular al plano dado que pase por A ;

c) ¿cuántas soluciones tienen las cuestiones a) y b) y qué relación guardan en ellas?

(Univ. de Sevilla)

El vector (2, 1, −1) es perpendicular al plano π.



a) —el plano pedido, por pasar por A(1, 2,−1), tendrá por ecuación

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z+1) = 0 \qquad (1)$$

siendo este plano perpendicular al vector (a, b, c)

— si este plano es perpendicular al plano π, los vectores (2, 1, −1) y (a, b, c) serán perpendiculares, de donde:

$$2a + b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + b$$

llevando este valor a (1) se tiene la ecuación

$$a(x-1)+b(y-2)+(2a+b)(z+1)=0 \Rightarrow \boxed{ax+by+(2a+b)z+a-b=0} \qquad (2)$$

que representa todos los planos que pasan por A y son perpendiculares a π, según los valores de a y b.

En (2) se podría dividir por a (o por b) la ecuación (2) y eliminar un parámetro, pero así se eliminan las soluciones $a=0$ (o $b=0$), por lo que debe dejarse la ecuación (2) tal como está.

b) Toda recta perpendicular al plano π será paralela al vector $(2, 1, -1)$, que es perpendicular a π. La recta pedida, por pasar por el punto $A(1, 2, -1)$ y ser perpendicular a π tendrá por ecuaciones:

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}}$$

c) La cuestión a) tiene infinitas soluciones, ya que en (2) a cada valor real de a y b corresponde un plano distinto.

La cuestión b) tiene una sola solución.

Las soluciones de la cuestión a) representan el haz de planos de eje la recta de la solución de la cuestión b).

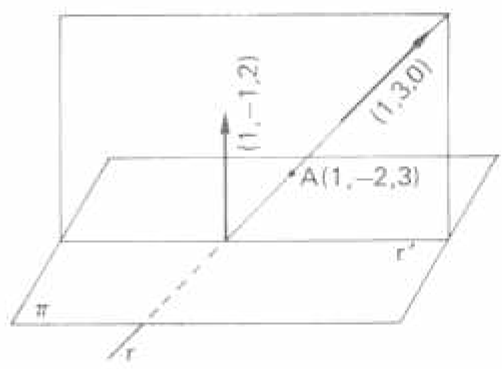
8.14 Hallar unas ecuaciones de la recta r', proyección ortogonal de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

sobre el plano $\pi:\ x-y+2z+4=0.$

(Univ. de Madrid, 1991)

La recta pedida es la intersección del plano π con el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. Este plano es el que contiene al punto $A(1, -2, 3)$ de r y es paralelo a los vectores $(1, 3, 0)$, paralelo a la recta r, y $(1, -1, 2)$, perpendicular al plano π, sus ecuaciones son:



$$\left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -2+3\lambda-\mu \\ z = 3 \qquad +2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 3 & -1 \\ z-3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;$$

$$6(x-1)-2(y+2)-4(z-3)=0 \quad ; \quad 6x-2y-4z+2=0 \ ; \quad 3x-y-2z+1=0$$

$$\boxed{r': \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ 3x-y-2z+1=0 \end{cases}}$$

8.15 **Determinar, según los valores de m, si las rectas:**

$$r: \ \frac{x-1}{2} = 1-y = \frac{z+1}{2} \quad ; \quad s: \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + mz = 1 \\ x + 4y + z = 2 \end{array} \right.$$

tienen algún punto común.

(Univ. de Santiago)

$$\frac{x-1}{2} = 1-y = \frac{z+1}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = 2\lambda - 1 \end{array} \right. \qquad \text{ecuaciones paramétricas de } r.$$

La recta r cortará a la recta s si coincide la intersección de la r con cada uno de los planos que determinan la recta s. Si a es el valor de λ que nos da la intersección de r con s, se tendrá:

$$\left. \begin{array}{r} 2(2a+1) - (-a+1) + m(2a-1) = 1 \\ 2a + 1 + 4(-a+1) + \ \ 2a - 1 = 2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 4 = 2$$

se llega a una contradicción, veamos a qué es debido.

Observando las ecuaciones de r y s, se deduce que r es paralela al vector $(2,-1,2)$ y el segundo plano de s es perpendicular al vector $(1,4,1)$, como: $(2,-1,2)\cdot(1,4,1) = 2-4+2 = 0$, los dos vectores son perpendiculares, de donde resulta que la recta r es paralela a dicho plano, no estando contenida en él ya que el punto $(1,1,-1)$ de r no satisface la ecuación del plano. Si r es paralela al plano, r no corta a dicho plano, ni por lo tanto a la recta s contenida en el plano.

Para ningún valor de m se cortan las rectas r y s.

8.16 **Sea π un plano que pasa por $P(1, 2, 1)$ y corta a los semiejes coordenados positivos en los puntos A, B y C. Sabiendo que el triángulo ABC es equilátero, hallar la ecuación de π.**

(Univ. de Sevilla 1991)

Sean $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ los puntos de corte del plano pedido con los ejes coordenados $(a > 0, b > 0, c > 0)$. La ecuación secular del plano determinado por los puntos A, B y C es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \qquad (1)$$

Por pasar el plano por el punto $P(1, 2, 1)$:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} - 1 = 0 \qquad (2)$$

Por ser el triángulo ABC equilátero: $\text{dist}(A, B) = \text{dis}(A, C) = \text{dist}(B, C)$:

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 = b^2 + c^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b^2 = c^2 \\ a^2 = c^2 \end{array} \right. \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow$$

(por ser a, b y c positivos) $\qquad a = b = c.$

Llevando estos valores a (2): $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{4}{a} - 1 = 0 \Rightarrow a = 4 = b = c$

sustituyendo estos valores en (1):

$$\pi: \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z - 4 = 0}$$

8.17 **En el espacio euclídeo, referido a un sistema de coordenadas ortonormal, se eligen sobre los ejes OX, OY, OZ puntos A, B, C, distintos del origen O, de coordenadas A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) respectivamente, tales que:**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

Demostrar que todos los planos ABC obtenidos al variar A, B y C verificando las condiciones anteriores, pasan por un mismo punto P cuyas coordenadas se determinarán.

(Univ. de Murcia, 1991)

La ecuación secular del plano ABC es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)$$

y como cualquiera que sean a, b y c se verifica la relación

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

se tiene que el punto P(1, 1, 1) satisface la ecuación (1), o sea que todos los planos ABC pasan por el punto P(1, 1, 1).

8.18 **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1, −1, 1) y es perpendicular al plano que conteniendo a la recta**

$$r: \frac{2x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

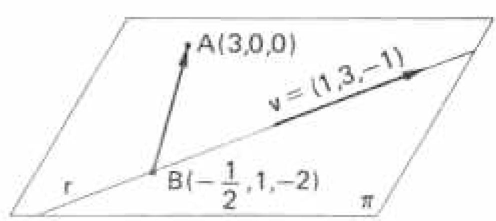
corta al eje OX en el punto de abscisa 3.

(Univ. de Santiago)

Hallemos un vector perpendicular al plano π que contiene a la recta

$$r: \frac{x + \frac{1}{2}}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

y al punto A(3, 0, 0):



– el punto $B(-\frac{1}{2}, 1, -2)$ pertenece a r, y por lo tanto al plano π

– el vector $BA = (3 + \frac{1}{2}, 0 - 1, 0 + 2) = (\frac{7}{2}, -1, 2)$ pertenece a π, ya que los puntos A y B pertenecen a π

– el vector v = (1, 3, −1) es paralelo a la recta r.

– el producto vectorial de los vectores BA y v nos dará un vector perpendicular a estos dos vectores, y perpendicular, por tanto al plano π:

$$BA \wedge v \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{7}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\,i + \frac{11}{2}\,j + \frac{23}{2}\,k$$

La recta pedida es la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y es paralela al vector $(-5, \frac{11}{2}, \frac{23}{2})$, su ecuación es:

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{\frac{11}{2}} = \frac{z-1}{\frac{23}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x-1}{-10} = \frac{y+1}{11} = \frac{z-1}{23}}$$

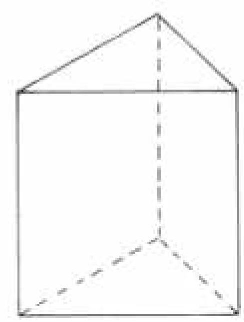
8.19 Comprobar que los tres planos siguientes

$$\pi_1 \equiv 3x - 2y - 1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 4y - 3z + 2 = 0$$
$$\pi_3 \equiv -2x + z + 4 = 0$$

son las tres caras laterales de un prisma.

(Univ. de Salamanca)

Los tres planos contendrán a las caras laterales de un prisma si las rectas en que se cortan los planos (dos a dos) son paralelas.



El vector $(3, -2, 0)$ es perpendicular al plano π_1, y el $(0, 4, -3)$ es perpendicular a π_2:

$$(3, -2, 0) \wedge (0, 4, -3) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6u_1 + 9u_2 + 12u_3 \quad \Rightarrow$$

el vector $(6, 9, +12)$ es perpendicular a los vectores $(3, -2, 0)$ y $(0, 4, -3)$ y por lo tanto paralelo a los planos π_1 y π_2 y a su recta intersección:

el vector $(6, 9, +12)$ es paralelo a $\pi_1 \cap \pi_2$ (1)

De igual forma:

el vector $(3, -2, 0) \perp$ a π_1
" " $(-2, 0, 1) \perp$ a π_3

$$(3, -2, 0) \wedge (-2, 0, 1) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2u_1 - 3u_2 - 4u_3 \Rightarrow$$

el vector $(-2, -3, -4)$ es paralelo a $\pi_1 \cap \pi_3$ (2)

el vector $(0, 4, -3) \perp$ a π_2
" " $(-2, 0, 1) \perp$ a π_3

$$(0, 4, -3) \wedge (-2, 0, 1) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4u_1 + 6u_2 + 8u_3 \Rightarrow$$

el vector $(4, 6, 8)$ es paralelo a $\pi_2 \cap \pi_3$ (3)

De (1), (2) y (3) se deduce que los tres planos se cortan en tres rectas paralelas, ya que los tres vectores paralelos a dichas rectas tienen sus componentes proporcionales, o sea que son paralelos.

8.20 **Calcular el punto P de la recta** $r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

de forma que el plano que contiene a P y a la recta $s: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$

sea paralelo a la recta: $t: \begin{cases} y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

(Univ. de Madrid, 1991)

Todo punto de la recta r tendrá nulas su primera y su tercera coordenadas. Sea P(0, a, 0):

Haciendo $x = 0$ y $x = 1$ en las ecuaciones de s tenemos los puntos B(0, 1, 1) y C(1, 0, 3). El plano que contiene a P y a la recta s es el plano determinado por los puntos A, B y C:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(3 - 2a)x + y + (a - 1)z - a = 0 \qquad (1)$$

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta t:

$$\left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 - z \\ x = 0 \end{matrix} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El plano (1) es perpendicular al vector (3–2a, 1, a–1), y la recta t es paralela al vector (0, –1, 1). Si el plano es paralelo a la recta, los vectores anteriores son perpendiculares, su producto escalar es nulo:

$$0 \cdot (3 - 2a) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (a - 1) = 0 \Rightarrow -1 + a - 1 = 0 \; ; \quad a = 2 \Rightarrow \boxed{P(0, 2, 0)}$$

8.21 **Consideremos los puntos P = (–1, 1, 1), Q = (7, 1, 7) y R = (–4, 1, 5).**
Se pide:

a) Demuestra que son los vértices de un triángulo rectángulo y calcula la longitud de cada cateto y el área del triángulo.

b) Obtén la ecuación del plano que los contiene.

c) Obtén un punto T de manera que los puntos P, Q, R y T sean los vértices de un rectángulo.

(Univ. de Valencia, 1991)

a) El triángulo PQR será rectángulo si son perpendiculares algún par de los vectores:

$$PQ = (8, 0, 6), \quad PR = (-3, 0, 4), \quad QR = (-11, 0, -2)$$

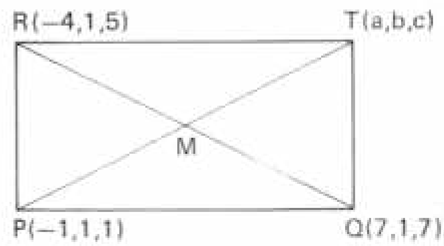
$PQ \cdot PR = 8(-3) + 0 + 6 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow$ los vectores PQ y PR son perpendiculares.

$$|PQ| = \sqrt{64 + 36} = 10 \; ; \quad |PR| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Area del triángulo: $\frac{1}{2} |PQ| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = \boxed{25}$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(y-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{y = 1}$$



c) Si $T(a, b, c)$ es el punto pedido, como las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{7-4}{2} \\[2ex] \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} \\[2ex] \dfrac{c+1}{2} = \dfrac{7+5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-1 = 3 \ , \ a = 4 \\[2ex] b+1 = 2 \ , \ b = 1 \\[2ex] c+1 = 12 \ , \ c = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T(4, 1, 11)}$$

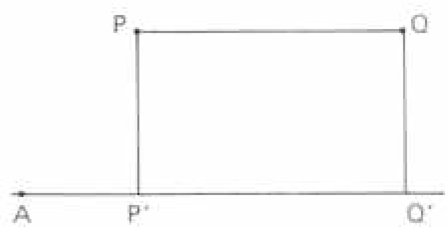
8.22 **Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P(1, 1, -3)$, $Q(-1, 0, 0)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A(4, 3, -5)$. Se pide:**

a) Ecuación de la recta r y ecuación del plano que contiene al rectángulo.

b) Las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

(Univ. de Málaga, 1991)

Como los lados opuestos del rectángulo son paralelos, la recta r es la recta que pasa por el punto $A(4, 3, -5)$ y es paralela al vector



$$PQ = (-1-1, 0-1, 0+3) = (-2, -1, 3),$$

sus ecuaciones son:

$$r: \boxed{\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{3}} \quad ; \quad \boxed{\begin{array}{l} x = 4 - 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{array}}$$

El plano que contiene al rectángulo es el plano determinado por los puntos A, P y Q:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z & 1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 5 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x+1) + 5y - z = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-4x + 5y - z - 4 = 0}$$

b) Sea a el valor de λ, en la ecuación de r, que nos da las coordenadas de P', o sea las coordenadas de P' son: $(4-2a, 2-a, -5+3a)$. Los vectores $PQ = (-2, -1, 3)$ y $PP' = (3-2a, 2-a, -2+3a)$ son perpendiculares, su producto escalar es igual a 0:

$-2(3-2a) - 1(2-a) + 3(-2+3a) = 0$; $-14 + 14a = 0$; $a = 1 \Rightarrow \boxed{P'(2, 2, -2)}$

De la misma forma se obtienen las coordenadas de Q': $\boxed{Q'(0, 1, 1)}$.

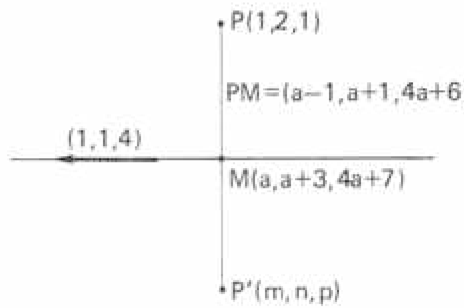
8.23 **Hallar el punto simétrico del punto P(1, 2, 1) respecto de la recta**

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ 4x-z+7=0 \end{cases}$$

(Univ. de Salamanca, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+3=0 \\ 4x-z+7=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=x+3 \\ z=4x+7 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda+3 \\ z=4\lambda+7 \end{array}\right.$$



Si a es el valor de λ que nos da las coordenadas del punto M, pie de la perpendicular desde P a la recta, o sea $M(a, a+3, 4a+7)$, el vector

$$PM = (a-1, a+1, 4a+6)$$

es perpendicular al vector (1, 1, 4) que es paralelo a la recta. El producto escalar de estos dos vectores es nulo:

$$1\cdot(a-1)+1\cdot(a+1)+4(4a+6)=0 \Rightarrow 18a+24=0 \Rightarrow a=-\frac{24}{18}=-\frac{4}{3}$$

de donde $M\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}+3, -\frac{16}{3}+7\right)$, $M\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

El punto P' (m, n, p), simétrico de P respecto de la recta, es el simétrico de P respecto del punto M. Por ser M el punto medio del segmento PP', las coordenadas de M son la semisuma de las coordenadas de P y P':

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1+m}{2}=-\frac{4}{3} \\ \frac{2+n}{2}=\frac{5}{3} \\ \frac{1+p}{2}=\frac{5}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3+3m=-8 \\ 6+3n=10 \\ 3+3p=10 \end{array}\right| \Rightarrow m=-\frac{11}{3}, n=\frac{4}{3}, p=\frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{P'\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

8.24 **Hallar el punto simétrico de A (1, 2, 3) respecto del plano**

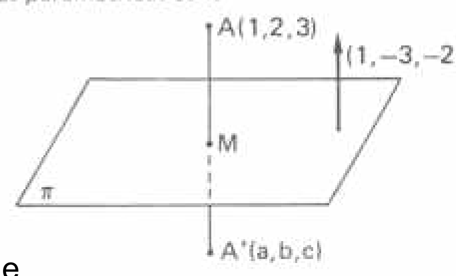
$$\pi:\ x-3y-2z+4=0$$

(Univ. de Barcelona, 1991)

El punto simétrico de A respecto del plano será el simétrico de A respecto del punto intersección con el plano de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano.

La recta que pasa por A y es perpendicular al plano es la recta que pasa por A y es paralela al vector (1,−3,−2), que es perpendicular al plano, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left|\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=3-2\lambda \end{array}\right.$$



Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano obtendremos el valor de λ que nos da el pie de la perpendicular desde A al plano:

$$(1+\lambda)-3(2-3\lambda)-2(3-2\lambda)+4=0 \Rightarrow -7+14\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

llevando este valor a las ecuaciones de la recta tendremos las coordenadas de M, pie de la perpendicular:

$$M(1+\frac{1}{2},\, 2-\frac{3}{2},\, 3-\frac{2}{2}) \qquad M(\frac{3}{2},\, \frac{1}{2},\, 2)$$

El punto M es el punto medio del segmento AA′, esto implica que las coordenadas de M son la semisuma de las coordenadas de A y A′. Si las coordenadas de A′ son (a, b, c):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+a}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{2+b}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{3+c}{2} &= 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow a=2,\ b=-1,\ c=1 \Rightarrow \boxed{A'(2,-1,1)}$$

SEGUNDA SOLUCION: Sea A′(a, b, c) el punto pedido.

– el vector $AA' = (a-1,\ b-2,\ c-3)$ es perpendicular al plano, y por lo tanto paralelo al vector $(1,-3,-2)$ que también es perpendicular al plano, de donde:

$$\frac{a-1}{1}=\frac{b-2}{-3}=\frac{c-3}{-2} \Rightarrow \left|\begin{aligned} \frac{a-1}{1} &= \frac{b-2}{-3} \\ \frac{a-1}{1} &= \frac{c-3}{-2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} -3a+3&=b-2 \Rightarrow b=-3a+5 \quad (1) \\ -2a+2&=c-3 \Rightarrow c=-2a+5 \quad (2) \end{aligned}\right.$$

– el punto M, punto medio del segmento AA′ está sobre el plano; las coordenadas de

$$M(\frac{1+a}{2},\, \frac{2+b}{2},\, \frac{3+c}{2})$$

satisfacen la ecuación del plano:

$$\frac{1+a}{2}-3\,\frac{2+b}{2}-2\,\frac{3+c}{2}+4=0 \Rightarrow 1+a-6-3b-6-2c+8=0 \Rightarrow a-3b-2c-3=0 \quad (3)$$

llevando los valores de (1) y (2) a (3): $a-3(-3a+5)-2(-2a+5)-3=0 \Rightarrow 14a-28=0 \Rightarrow$ $a=2$ y llevando este valor a (1) y (2) se obtiene: $b=-3\cdot2+5=-1$; $c=-2\cdot2+5=1$, de donde:

$$\boxed{A'(2,-1,1)}$$

8.25 **1) Hallar la ecuación de la recta r que define el haz de planos:**

$$x+(m-1)y+mz+2+m=0$$

2) Calcular la ecuación de una recta s que pasa por el origen de coordendas, es perpendicular a r y paralela al plano $x=2$.

(Univ. de León, 1991)

1) El haz de planos se puede escribir de la forma:

$$(y+z+1)m+(x-y+2)=0$$

cualquiera que sea m los puntos de la recta $\boxed{r: \left\{\begin{aligned} y+z+1&=0 \\ x-y+2&=0 \end{aligned}\right.}$

satisfacen al haz de planos. Las ecuaciones de r se pueden escribir de la forma:

$$\begin{cases} z = -1 - y \\ x = -2 + y \end{cases} \Rightarrow \text{(haciendo } y = \lambda) \qquad \boxed{r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}} \qquad \text{ecuaciones paramétricas de } r$$

2) La recta pedida, por pasar por $O(0, 0, 0)$, tendrá por ecuación:

$$s: \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad (1)$$

La recta s es paralela al vector (a, b, c), y la r es paralela al vector $(1, 1, -1)$ Por ser s y r perpendiculares, también lo son sus vectores directores, de donde:

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c(-1) = 0 \qquad (2)$$

El vector $(1, 0, 0)$ es perpendicular al plano $x = 2$. Por ser la recta s paralela al plano, los vectores $(1, 0, 0)$ y (a, b, c) son perpendiculares, de donde:

$$1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \qquad (3)$$

De (2) y (3) se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b - c &= 0 \\ a \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} b &= c \\ a &= 0 \end{aligned}$$

llevando estos valores a (1) y dividiendo los denominadores por c:

$$s: \frac{x}{0} = \frac{y}{c} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \boxed{s: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

8.26 **a) Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $A(1, 2, 3)$ forme ángulos iguales con los ejes coordenados.**

b) Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $B(2, 4, 2)$ y contenga a la recta del apartado a). Razonar las respuestas.

(Univ. de Oviedo, 1991)

a) Los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, así como sus opuestos, forman ángulos iguales con los ejes coordenados.

La recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $(1, 1, 1)$ formará ángulos iguales con los ejes coordenados:

$$\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}}$$

e igual se procede considerando los restantes vectores mencionados.

b) El plano pedido es el plano que pasa por el punto $B(2,4,2)$ y es paralelo a los vectores $(1,1,1)$ y $AB = (2-1, 4-2, 2-3) = (1, 2, -1)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x-2) + 2(y-4) + (z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + 2y + z - 4 = 0}$$

8.27 **Hallar la ecuación de dos rectas cualesquiera r y s paralelas al plano**

$$x + 2y - z = 1$$

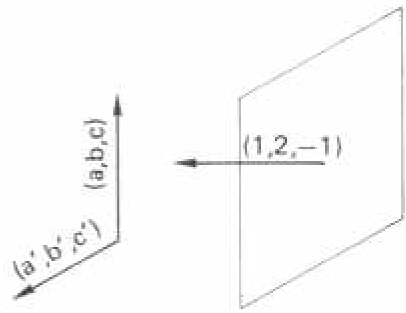
tales que r y s sean perpendiculares.

(Univ. de Sevilla)

Podemos suponer que las rectas r y s pasan por el punto (0, 0, 0), sus ecuaciones serán:

r: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, recta paralela al vector (a, b, c)

s: $\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}$, recta paralela al vector (a',b',c')



El vector (1, 2,– 1) es perpendicular al plano.

Por ser la recta r paralela al plano, los vectores (a, b, c) y (1, 2,– 1) son perpendiculares:

$$1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c = 0$$

una solución de esta ecuación es: $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

Por ser la recta s paralela al plano, los vectores (a', b', c') y (1, 2,– 1) son perpendiculares:

$$1 \cdot a' + 2 \cdot b' - 1 \cdot c' = 0 \ ; \qquad a' + 2b' - c' = 0 \qquad (1)$$

Por ser las rectas r y s perpendiculares, los vectores (a, b, c) = (1, 0, 1) y (a', b', c') son perpendiculares:

$$1 \cdot a' + 0 \cdot b' + 1 \cdot c' = 0 \ ; \qquad a' + c' = 0 \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a' + 2b' - c' = 0 \\ a' \qquad\ \ + c' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \qquad\qquad -c' + 2b' - c' = 0, \quad b' = c' \\ a' = -c' \end{array}$$

haciendo $c' = -1$: $(a', b', c') = (1, -1, -1)$.

Las ecuaciones de r y s son: r: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ s: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

o bien:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}} \quad ; \quad \boxed{s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}}$$

8.28 **Hallar los valores de a para que los planos**

$$p: \ -x + y + az = 0 \qquad ; \qquad q: \ ax + 2y + 2z = 0$$

corten al plano

$$t: \ x - y + z = 1$$

en dos rectas perpendiculares.

(Univ. de Madrid, Septiembre 1991)

Si $a \neq 1$ los plano p y t determinan la recta r:

$$r: \begin{cases} -x + y + az = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + az = x \\ -y + z = 1-x \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} x & a \\ 1-x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1+a)x-a}{1+a} =$$

$$= x - \frac{a}{1+a}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}}{1+a} = \frac{1-x+x}{1+a} = \frac{1}{1+a} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - \dfrac{a}{1+a} \\ z = \dfrac{1}{1+a} \end{cases}$$

Los planos q y t determinan la recta s:

$$s: \begin{cases} ax + 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = -ax \\ -y + z = 1-x \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -ax & 2 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(2-a)x-2}{4};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -ax \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}}{4} = \frac{-(a+2)x+2}{4} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = (2-a)\mu - \dfrac{1}{2} \\ z = -(a+2)\mu + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Las rectas r y s serán perpendiculares si lo son los vectores $(1,1,0)$ y $(4, 2-a, -a-2)$ que son paralelos respectivamente a las dos rectas, o sea si:

$$(1,1,0) \cdot (4, 2-a, -a-2) = 0 \Rightarrow 1 \cdot 4 + 1 \cdot (2-a) + 0 \cdot (-a-2) = 0 \Rightarrow 4 + 2 - a = 0; \ \boxed{a = 6}$$

8.29 Calcular el ángulo formado por las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad ; \quad s: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \quad z = 0 \end{cases}$$

(Univ. de Santiago)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de s:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ 2x \quad + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 - x - z = 1 - x + 2x = 1 + x \\ z = -2x \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

El ángulo formado por ambas rectas es igual (o suplementario) del ángulo formado por los vectores $(2,1,1)$ y $(1,1,-2)$ que son paralelos, respectivamente a r y a s. Multiplicando escalarmente estos vectores:

$$|\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4} \cdot \cos\alpha| = |2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1(-2)| = 1 \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{6}}$$

8.30 Hallar la longitud de la proyección del vector v de origen (2, 3, 4) y extremo (0, −3, 1) sobre la recta r de ecuaciones

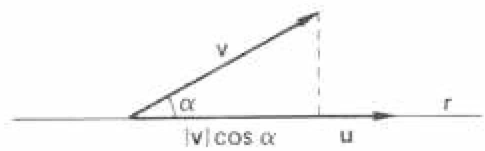
$$x - 1 = 2y + 2 = z - 1$$

(Univ. de Salamanca)

Las componentes del vector v son: $(0-2, -3-3, 1-4) = (-2, -6, -3)$.

Dividiendo por 2 las ecuaciones de la recta (para que todos los coeficientes de x, y, z sean 1), tendremos que la ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$$



Si α es el ángulo que forman el vector v y la recta r, la longitud de proyección del vector v sobre r es igual a

$$|\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha$$

Considerando el producto escalar del vector $\mathbf{v} = (-2, -6, -3)$ y el vector $\mathbf{u} = (2, 1, 2)$, paralelo a la recta:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \sqrt{4+36+9}\cdot\sqrt{4+1+4}\cdot\cos\alpha = (-2)\cdot 2 + (-6)\cdot 1 + (-3)\cdot 2 = -16 \quad\Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{4+36+9}\cdot\cos\alpha\right| = \boxed{\frac{16}{3}}$$

8.31 **Calcular el ángulo formado por el plano**

$$\pi:\ 2x+3y-2z+5=0$$

y la recta:

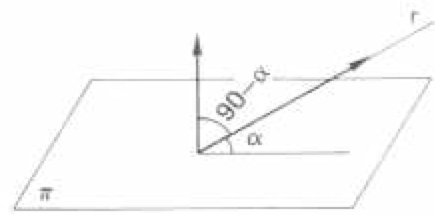
$$r:\ \begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Los vectores $(3, 1, -1)$ y $(1, -2, 1)$ son perpendiculares, respectivamente a los planos que determinan la recta r. El vector $(3, 1, -1) \wedge (1, -2, 1)$ es un vector paralelo a r:

$$(3,1,-1)\wedge(1,-2,1) \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -i-4j-7k$$

El vector $(2, 3, -2)$ es perpendicular al plano π, y el vector $(-1, -4, -7)$ es paralelo a la recta, el ángulo que forman estos vectores es complementario del que forman la recta y el plano:



$$(2,3,-2)\cdot(-1,-4,-7) =$$

$$= \sqrt{4+9+4}\ \sqrt{1+16+49}\ \cos(90-\alpha) =$$

$$= 2(-1)+3(-4)+(-2)(-7) = 0 \quad\Rightarrow\quad 90-\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha = 90^\circ}$$

8.32 **Estudiar la posición relativa del plano π y la recta r dados por las ecuaciones:**

$$\pi \equiv 2x+4=0, \quad r \equiv \begin{cases} x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$$

y obtener, si fuese posible, el punto de intersección y el ángulo que forman recta y plano.

(Univ. de La Laguna Tenerife, 1991)

Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} x-z=3 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3+z \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=0 \\ z=\quad\lambda \end{array}\right. \qquad (1)$$

La recta r es paralela al vector $(1, 0, 1)$, y el plano es perpendicular al vector $(2, 0, 0)$. Si estos vectores fueran perpendiculares, la recta y el plano serían paralelos:

$$(1, 0, 1)\cdot(2, 0, 0) = 1\cdot 2+0+0 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la recta corta al plano}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z dados por las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano, obtendremos el valor de λ que nos da el punto de intersección de la recta con el plano:

$$2(3+\lambda)+4=0 \Rightarrow \lambda=-5$$

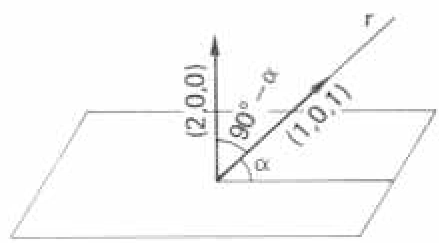
llevando este valor a (1): $x = 3-5 = -2,\ y = 0,\ z = -5 \Rightarrow \boxed{P(-2, 0, -5)}$

El ángulo que forman la recta y el plano es complementario del que forman los vectores $(1, 0, 1)$ y $(2, 0, 0)$:

$$(1, 0, 1)\cdot(2, 0, 0) = \sqrt{1+0+1}\,\sqrt{4+0+0}\cdot\cos(90-\alpha) =$$

$$= 1\cdot 2+0+0 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 45^\circ}$$

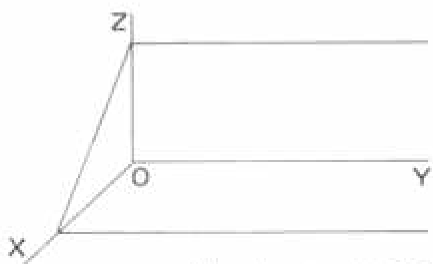


8.33 **Dado el plano π:** $\qquad$ $\mathbf{ax+z-2=0}$

1). Estudiar, según los valores del parámetro a, su posición relativa respecto al plano OXY.

2). Calcular el valor o valores de a para que la recta normal a π pasando por el origen forme con el plano OXY un ángulo igual a $\frac{\pi}{3}$.

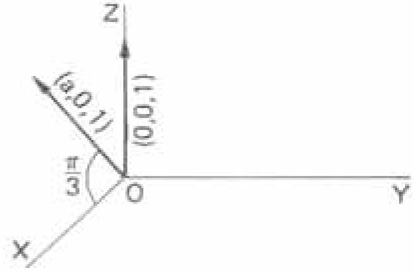
(Univ. de Santiago)



1). Si $a \neq 0$, el plano π es paralelo al eje OY y corta al plano XOY (en la figura se ha considerado $a > 0$).

Si $a = 0$, el plano π: $z = 2$, es paralelo al plano XOY.

2). El vector $(a, 0, 1)$ es perpendicular al plano π. La recta r que pasa por el origen y es perpendicular a π es paralela al vector $(a, 0, 1)$. El vector $(0,0,1)$ es perpendicular al plano OXY. Si la recta r y el plano $z = 0$ forman un ángulo igual a $\frac{\pi}{3}$, los vectores $(a, 0, 1)$ y $(0, 0, 1)$ forman un ángulo igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Expresando el producto escalar de los vectores $(a, 0, 1)$ y $(0, 0, 1)$:



$$a\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 = \sqrt{a^2+0+1}\ \sqrt{0+0+1}\ \cos\frac{\pi}{6}$$

$$1 = \sqrt{a^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\quad 1 = (a^2+1)\,\frac{3}{4}\ ;\quad a^2 = \frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3}\ ;\quad \boxed{a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

8.34 **Calcular el ángulo que forman los planos**

$$p:\ x + 2y - z = 3 \qquad q:\ 2x - y + 3z = 0$$

(Univ. de La Laguna — Tenerife)

Los vectores $(1, 2, -1)$ y $(2, -1, 3)$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos p y q. El ángulo formado por los dos vectores es igual o suplementario al ángulo formado por los dos planos, el coseno del ángulo de los dos planos es igual al valor absoluto del coseno del ángulo de los dos vectores.

Multiplicando escalarmente ambos vectores:

$$|(1, 2, -1)\cdot(2, -1, 3)| = |1\cdot 2 + 2(-1) + (-1)\cdot 3| = \sqrt{1+4+1}\,\sqrt{4+1+9}\cos\alpha \quad\Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

8.35 **Calcular los cosenos de los ángulos determinados por el plano**

$$\pi:\ 2x - 3y + 2z = 0$$

con cada uno de los planos OXY, OXZ y OYZ.

(Univ. de Alicante)

Sean α, β y γ los ángulos que forma el plano π con los planos OXY $(z = 0)$, OXZ $(y = 0)$ y OYZ $(x = 0)$.

El vector $(2, -3, 2)$ es perpendicular al plano π, y los vectores $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ son respectivamente, perpendiculares a los planos OXY, OXZ y OYZ:

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 1|}{\sqrt{4+9+4}\,\sqrt{0+0+1}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \qquad \cos\beta = \frac{|2\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{17}\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\gamma = \frac{|2\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 0|}{\sqrt{17}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

8.36 **Determinar la condición que deben verificar las coordendas de un punto P(x, y, z) para que equidiste de los puntos A(2, 0, −1) y B(0, 2, −1). Comprobar que la condición obtenida es la ecuación de un plano que pasa por el punto medio de AB.**

(Univ. de León, 1991)

Considerando que si son iguales las distancias del punto $P(x, y, z)$ a los puntos $A(2, 0, -1)$ y $B(0, 2, -1)$, también son iguales los cuadrados de estas distancias:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \quad\Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x - y = 0}$$

Esta condición es la ecuación de un plano por ser una ecuación lineal en x, y, z.

Las coordenadas del punto medio del segmento AB son la semisuma de las coordenadas de A y B:

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) \Rightarrow M(1, 1, -1)$$

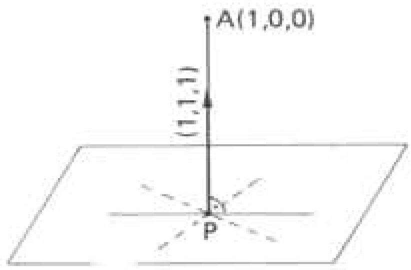
$1 - 1 = 0 \Rightarrow$ las coordenadas de M satisfacen la ecuación del plano $x - y = 0$.

8.37 **Hallar el punto P del plano $x+y+z-3=0$ que está más próximo al punto $A(1, 0, 0)$. ¿Cuál será la distancia de una recta, contenida en dicho plano y que pase por P, al punto $A(1, 0, 0)$?**

(Univ. de Cantabria, 1991)

El punto P es el pie de la perpendicular desde A al plano.

El vector $(1, 1, 1)$ es perpendicular al plano. La recta que pasa por $A(1, 0, 0)$ y es perpendicular al plano es la recta que pasa por $A(1, 0, 0)$ y es paralela al vector $(1, 1, 1)$, sus ecuaciones paramétricas son:



$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \qquad (1)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano hallaremos el valor de λ que nos da las coordenadas de P:

$$(1+\lambda)+\lambda+\lambda-3=0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda-2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2}{3}$$

llevando este valor a las ecuaciones (1):

$$x = 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \quad ; \quad y=\frac{2}{3} \quad ; \quad z=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$$

La recta AP por ser perpendicular al plano es perpendicular a toda recta contenida en el plano, en particular será perpendicular a toda recta contenida en el plano y que pase por P. La distancia del punto A a cualquier recta que pase por P y esté contenida en el plano es igual a la distancia entre los puntos A y P:

$$\text{distancia} = \sqrt{(\frac{5}{3}-1)^2+(\frac{2}{3}-0)^2+(\frac{2}{3}-0)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

8.39 **Se considera el plano de ecuación $2x+y-z-5=0$.**

Calcular la ecuación general de los planos paralelos al anterior. Calcular también un plano paralelo al anterior cuya distancia al mismo sea 7. ¿Es único este plano?

(Univ. de Cantabria, 1991)

Todos los planos paralelos al dado están contenidos en la ecuación

$$\boxed{2x+y-z+k=0} \qquad (1)$$

La distancia del plano dado al plano (1) es igual a la distancia de cualquier punto del plano dado al plano (1). Un punto del plano dado es el $(2, 1, 0)$, de donde:

$$\left|\frac{2 \cdot 2+1-0+k}{\sqrt{4+1+1}}\right| = 7 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{5+k}{\sqrt{6}}\right| = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{5+k}{\sqrt{6}} = 7 \quad \Rightarrow \quad k=-5+7\sqrt{6} \\ \dfrac{5+k}{\sqrt{6}} = -7 \quad \Rightarrow \quad k=-5-7\sqrt{6} \end{cases}$$

llevando estos valores a (1) obtenemos los planos pedidos:

$$\boxed{2x+y-z-5+7\sqrt{6}=0} \quad ; \quad \boxed{2x+y-z-5-7\sqrt{6}=0}$$

8.40 **Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta**

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ x \qquad + z = 3 \end{cases}$$

y distan 3 unidades del punto $(-1, 1, 2)$. Calcular el seno del ángulo formado por r y el plano coordenado OXY.

(Univ. de Santiago)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left.\begin{matrix} 3x-2y+2z=6 \\ x \qquad + z = 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \quad x = 3 - z \qquad 2y = 3x + 2z - 6 = 3(3-z) + 2z - 6 = 3 - z \ ; \quad y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z$$

haciendo $z = 2k$:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = \dfrac{3}{2} - k \\ z = \quad 2k \end{cases}$$

De las ecuaciones paramétricas de r se deduce que esta recta es paralela al vector $(-2, -1, 2)$. Todos los planos que son perpendiculares a r están contenidos en la ecuación

$$-2x - y + 2z + a = 0 \qquad (1)$$

De estos planos nos interesan los dos cuya distancia al punto $(-1, 1, 2)$ es 3:

$$3 = \text{valor absoluto de } \frac{-2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 + a}{\sqrt{4+1+4}} \quad \Rightarrow$$

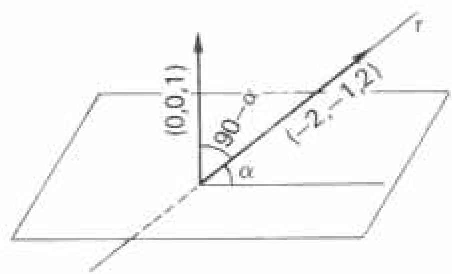
$$3 = \left|\frac{5+a}{3}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } a \geqslant -5: \ 3 = \dfrac{5+a}{3} \ ; \ 9 = 5 + a \ ; \quad a = 4 \\ \text{si } a < -5: \ 3 = -\dfrac{5+a}{3} \ ; \ 9 = -5 + a \ ; \quad a = -14 \end{cases}$$

llevando estos valores a (1) se obtienen los planos:

$$\boxed{-2x - y + 2z + 4 = 0} \quad ; \quad \boxed{-2x - y + 2z - 14 = 0}$$

El plano coordenado OXY tiene por ecuación

$$z = 0$$



El vector $(0, 0, 1)$ es perpendicular a este plano y el vector $(-2, -1, 2)$ es paralelo a la recta. Si α es el ángulo que forman el plano y la recta, los vectores anteriores forman el ángulo $90 - \alpha$. Multiplicando escalarmente estos vectores:

$$(0,0,1)\cdot(-2,-1,2) = 0\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 1\cdot 2 = \sqrt{0+0+1}\ \sqrt{4+1+4}\ \cos(90-\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$2 = 3 \operatorname{sen} \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}}$$

8.41 **Dados los puntos A: $(3, -2, 0)$ y B: $(1, -2, -2)$ y la recta r: $x = y = z$, calcular la distancia desde el punto B al plano que contiene a r y al punto A.**

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Los puntos $C(0, 0, 0)$ y $D(1, 1, 1)$ pertenecen a la recta r. El plano que contiene a r y al punto $A(3, -2, 0)$ es el plano determinado por los puntos A, C y D:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2x - 3y + 5z = 0$$

La distancia del punto B a este plano es: $d = \dfrac{|-2 \cdot 1 + (-3)(-2) + 5(-2)|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \boxed{\dfrac{6}{\sqrt{38}}}$

8.42 Hallar la distancia entre los planos

$$\pi_1: \; x + y + z - 3 = 0 \quad ; \qquad \pi_2: \; 3x + 3y + 3z - 5 = 0$$

(Univ. de Santiago)

Los planos son paralelos. Dividiendo la ecuación de π_2 por 3:

$$\pi_2: \; x + y + z - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left| -\frac{5}{3} - (-3) \right|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$$

8.43 Hallar la distancia del punto P al plano determinado por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, 1)$ y $C(1, 2, 0)$, siendo P el punto en que la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

corta al plano $\pi \equiv 2x + y - z + 4 = 0.$

(Univ. de Córdoba)

Ecuación del plano determinado por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, 1)$ y $C(1, 2, 0)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & z-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} y & z-1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -y - 2z + 2 = 0$$

Cálculo de P: Escribiendo las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{-1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = 3\lambda + 4 \\ z = -\lambda + 4 \end{cases}$$

Si a es el valor de λ que nos da el punto P, o sea si $P(2a + 2, 3a + 4, -a + 4)$, como el punto P está sobre el plano π, sus coordenadas deben satisfacer a la ecuación de π:

$$2(2a+2)+(3a+4)-(-a+4)+4=0 \quad \Rightarrow \quad 8a+8=0\,; \quad a=-1$$

sustituyendo este valor en las coordenadas de P se obtiene: P(0, 1, 5):

distancia de P(0, 1, 5) al plano $y+2z-2=0$: $\quad d=\dfrac{|1+2\cdot 5-2|}{\sqrt{1+4}}=\boxed{\dfrac{9}{\sqrt{5}}}$

8.44 **Encontrar las ecuaciones de todos los planos paralelos a**

$$4x-4y+2z=1$$

y que disten de éste una unidad de longitud. *(Univ. de Barcelona)*

La ecuación $\qquad 4x-4y+2z-k=0 \qquad (1)$

comprende todos los planos que son paralelos al dado.

El punto $A(0, 0, \frac{1}{2})$ pertenece al plano $4x-4y+2z=1$. La distancia del punto A a los planos buscados, de ecuación (1), es igual a 1:

$$\left|\frac{4\cdot 0-4\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}-k}{\sqrt{16+16+4}}\right|=1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1-k}{6}\right|=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1-k}{6}=1\,; & k=-5 \\ \dfrac{1-k}{6}=-1\,; & k=7 \end{cases}$$

llevando estos valores a (1) tenemos los planos buscados:

$$\boxed{4x-4y+2z+5=0} \qquad ; \qquad \boxed{4x-4y+2z-7=0}$$

También podiamos haber razonado así:

La distancia entre los planos paralelos $4x-4y+2z-1=0$ y $4x-4y+2z-k=0$ es 1:

$$1=\left|\frac{-1-(-k)}{\sqrt{16+16+4}}\right| \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{|-1+k|}{6}$$

obteniéndose el mismo resultado.

8.45 **Dadas las rectas**

$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1} \qquad s:\ \frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$$

1) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

2) Determinar la distancia de s al plano π.

(Univ. de Madrid, 1991)

1) El plano π es el plano que pasa por el punto $A(1,-1,0)$, perteneciente a r, y es paralelo a los vectores $(2,3,-1)$ y $(-3,3,2)$, paralelos, respectivamente, a las rectas r y s:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$= 9(x-1) - (y+1) + 15z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi: \quad 9x - y + 15z - 10 = 0}$$

2) Como la recta s y el plano π son paralelos, la distancia de s al plano π es la distancia de cualquier punto de la recta al plano:

El punto $(0, 2, -1)$ pertenece a s:

$$\text{dist}(s, \pi) = \frac{9 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 15(-1) - 10}{\sqrt{81 + 1 + 225}} = \boxed{\frac{27}{\sqrt{307}}}$$

8.46 **Se considera la recta** $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ **y el punto** $A(0, 1, 3)$, **se pide:**

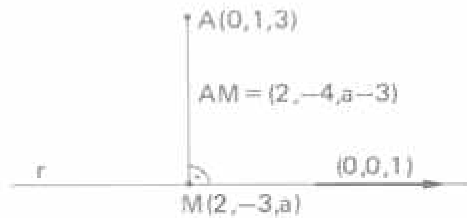
1º) Hallar la distancia de A a r.

2º) Determinar el plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r.

(Univ. de Madrid)

1º) Las ecuaciones paramétricas de la recta r

son: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \lambda \end{cases}$



Sea $M(2, -3, a)$ el pie de la perpendicular de A sobre r. El vector $AM = (2-0, -3-1, a-3) =$ $(2, -4, a-3)$ es perpendicular a r y como el vec- $(0, 0, 1)$ es paralelo a la recta, los vectores $(2, -4, a-3)$ y $(0, 0, 1)$ serán perpendiculares, su pro- ucto escalar será cero:

$$(2, -4, a-3) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + (a-3) = 0 \Rightarrow a = 3$$

a distancia de A a la recta es igual a la distancia entre los puntos $A(0, 1, 3)$ y $M(2, -3, 3)$:

$$d(A, r) = d(A, M) = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

2º) El plano pedido, por contener a la recta r, es paralelo al vector $(0, 0, 1)$ paralelo a r, y es ambién paralelo al vector $AM = (2, -4, 0)$ por contener los puntos A y M. Luego es el plano que asa por el punto $A(0, 1, 3)$ y es paralelo a los vectores $(0, 0, 1)$ y $(2, -4, 0)$, sus ecuaciones para- nétricas son:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 0 \cdot \lambda - 4\mu \\ z = 3 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 - 4\mu \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}$$

eliminando λ y μ (basta igualar los valores de μ dados por las dos primeras ecuaciones):

$$\mu = \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow \boxed{4x + 2y - 2 = 0}$$

8.47 **Determinar, en función de x, la distancia de un punto de coordenadas $(x, 0, 0)$ a la recta**

$$r: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

¿Para qué punto $(x, 0, 0)$ la distancia a dicha recta es igual a la distancia al plano $x = 0$?

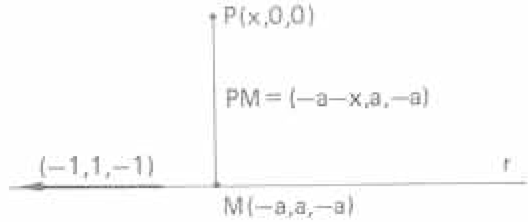
(Univ. de Cantabria)

Escribamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-y \\ z=-y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{matrix}\right\}$$

Sea $M(-a, a, -a)$ el pie de la perpendicular del punto $P(x, 0, 0)$ a la recta r.

El vector $PM = (-a-x,\ a, -a)$ es perpendicular a la recta r, y, por lo tanto, perpendicular al vector $(-1, 1, -1)$ que es paralelo a r:



$$(-1)\cdot(-a-x) + 1\cdot a + (-1)(-a) = 0 \Rightarrow$$

$$a + x + a + a = 0 \ ; \quad a = \frac{-x}{3}$$

La distancia del punto $P(x, 0, 0)$ a la recta r es igual a la distancia entre los puntos $P(x, 0, 0)$ y $M\left(\frac{x}{3}, -\frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$:

$$\text{dist. } (P, r) = \sqrt{\left(\frac{x}{3}-x\right)^2 + \left(-\frac{x}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{x}{3}-0\right)^2} = \boxed{\frac{|x|}{3}\sqrt{6}}$$

La distancia del punto $P(x, 0, 0)$ al plano $x = 0$ es igual a x.

$$\text{dist } (P \text{ a } r) = \text{dist } (P \text{ al plano } x=0) \Rightarrow \frac{|x|}{3}\sqrt{6} = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0, 0, 0)$$

8.48 **Se quiere atar una cuerda que pasa por un argolla, situada en el punto $A(2, 1, 1)$, a dos postes r y s de ecuaciones:**

$$r: \left|\begin{matrix} x = t+1 \\ y = t-1 \\ x = 2t+1 \end{matrix}\right. \ ; \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

de modo que la longitud de la cuerda empleada sea la menor posible.

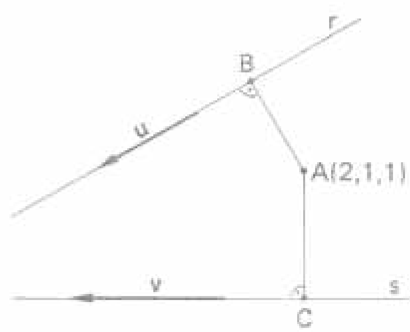
a) Hallar los puntos B sobre r y C sobre s a los que debe anudarse la cuerda.

b) ¿Qué ángulo forman las rectas AB y AC?

(Univ. de Alicante, 1991)

a) Los puntos B y C serán los pies de las perpendiculares desde el punto A a las rectas r y s.

Sea a el valor del parámetro t que nos da las coordenadas de B, o sea $B(a+1, a-1, 2a+1)$. El vector $AB = (a+1-2, a-1-1, 2a+1-1) = (a-1, a-2, 2a)$ es perpendicular al vector $u = (1, 1, 2)$ que es paralelo a la recta r. El producto escalar de los vectores AB y u es nulo:



$$1(a-1) + 1(a-2) + 2(2a) = 0 \Rightarrow 6a - 3 = 0 \ ; \quad a = \frac{1}{2}$$

el punto B tiene por coordenadas $\left(\frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}-1, 2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)}$

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si c es el valor de λ que nos da el punto C: $C(2c+2, c, c)$. $AC = (2c, c-1, c-1)$.

AC y $v = (2, 1, 1)$ perpendiculares implica:

$$2(2c) + 1(c-1) + 1(c-1) = 0 \Rightarrow 6c - 2 = 0\ ; \quad c = \frac{1}{3}$$

las coordenadas de C son: $(2 \cdot \frac{1}{3} + 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \boxed{(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})}$

b) $AB = (\frac{3}{2} - 2, -\frac{1}{2} - 1, 2 - 1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$; $AC = (\frac{8}{3} - 2, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{3} - 1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

$AB \cdot AC = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(-\frac{2}{3}) + 1 \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow AB$ y AC son perpendiculares, las rectas AB y AC se cortan bajo un ángulo de $90°$.

8.49 **Para cada m se considera el plano**

$$\pi_m: \quad (1+2m)x + (1-m)y + (1+3m)z + 2m - 1 = 0$$

Demostrar que todos los planos π_m pasan por una recta r y hallar la mínima distancia entre las rectas r y r', siendo:

$$r': \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

(Univ. de Valladolid)

El plano π_m lo podemos escribir de la forma: $(2x - y + 3z + 2)m + (x + y + z - 1) = 0$

Cualquiera que sea el valor de m, los puntos de la recta

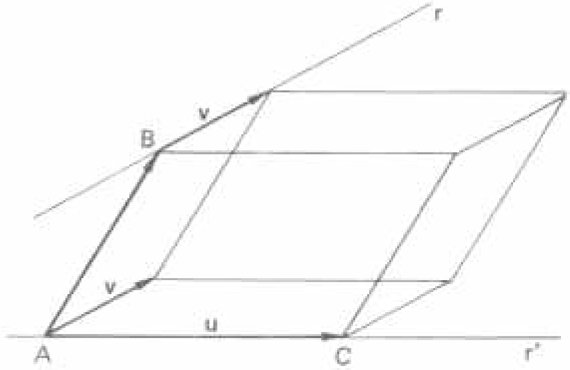
$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z + 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

satisfacen la ecuación del plano, lo que nos dice que la recta r está contenida en el plano π_m.

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r: \begin{cases} 2x - y = -3z - 2 \\ x + y = -z + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x = -4z - 1 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}z - \frac{1}{3}; \quad y = 2x + 3z + 2 = \frac{z}{3} + \frac{4}{3}$$

haciendo $z = 3\lambda$: $\quad r: \begin{cases} x = -4\lambda - \frac{1}{3} \\ y = \lambda + \frac{4}{3} \\ z = 3\lambda \end{cases}$



El punto $A(1, -1, 2)$ pertenece a r', y el punto $B(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$ pertenece a r. Los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $= \mathbf{v} = (-4, 1, 3)$ son paralelos, respectivamente, a r' y r. El volumen del paralelepípedo de la figura es igual al producto mixto de los vectores $AB = \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -2\right)$, u y v. Si este volumen lo dividimos por el área de la base, que es igual al módulo del producto vectorial de **u** y **v**, tendremos la altura del paralelepípedo, que es igual a la distancia entre las rectas r' y r:

$$\text{dist}\,(r', r) = \frac{|[AB, u, v]|}{|u \wedge v|}$$

$$[AB, u, v] = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 - 28 - 2 - 16 + 4 - 7 = -57$$

$$u \wedge v \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3i - 15j + 9k$$

$$\text{dist}\,(r', r) = \frac{|-57|}{\sqrt{9 + 225 + 81}} = \boxed{\frac{57}{\sqrt{315}}}$$

8.50 Dada la recta r de ecuación $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$, hallar:

a) Las ecuaciones implícitas de otra recta cualquiera r' que sea ortogonal a r, pase por el punto $A(0, -3, 2)$ y no corte a r.

b) Un punto B en r y otro punto B' en r' de modo que el módulo del segmento BB' sea la distancia entre r y r'.

(Univ. de Cantabria)

Las ecuaciones continuas de la recta r' serán de la forma $\dfrac{x-0}{a} = \dfrac{y+3}{b} = \dfrac{z-2}{c}$ (1)

Si r y r' son perpendiculares, los vectores $(3, 2, 4)$ y (a, b, c) serán perpendiculares, de donde

$$3a + 2b + 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{3}{2}a - 2c$$

llevando este valor a (1) obtenemos la ecuación: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y+3}{-\frac{3}{2}a - 2c} = \dfrac{z-2}{c}$

A cada valor que demos a a y c (no simultáneamente nulos) obtenemos la ecuación de una recta perpendicular a r y que pasa por el punto A. Por ejemplo, para $a = -2$ y $c = 1$, tenemos la recta r':

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{1} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+3}{1} \\ \dfrac{x}{-2} = \dfrac{z-2}{1} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x + 2y + 6 = 0 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{array}}$$

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de r y r'

$$r: \ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x = 3\lambda - 2 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 4\lambda \end{array}\right.$$

$$r': \ \frac{x}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{1} = \mu \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x = -2\mu \\ y = \mu - 3 \\ z = \mu + 2 \end{array}\right.$$

Los puntos B y B' serán los puntos de intersección de r y r' con la perpendicular común a ambas rectas y que las corta.

Sea a el valor de λ que nos da las coordenadas del punto B en r, o sea:

$B(3a-2,\ 2a+1,\ 4a)$

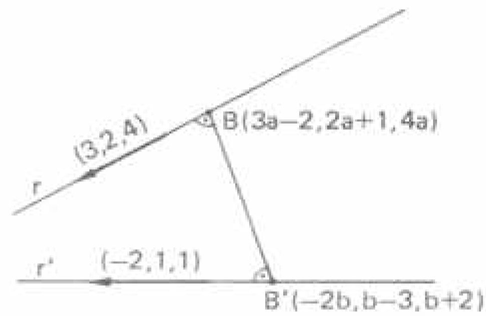
y sea b el valor de μ que nos da las coordenadas de B' sobre r', o sea:

$B'(-2b,\ b-3,\ b+2)$.

Considerando que B y B' son los pies de la perpendicular común a r y r', el vector

$BB' = (-2b-3a+2,\ b-2a-4,\ b-4a+2)$

es perpendicular al vector $(3,2,4)$, que es paralelo a r, y al vector $(-2,1,1)$ que es paralelo a r', de donde:



$$\left.\begin{array}{r} 3(-2b-3a+2)+2(b-2a-4)+4(b-4a+2)=0 \\ -2(-2b-3a+2)+1\cdot(b-2a-4)+1\cdot(b-4a+2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -29a+6=0 \\ 6b-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=\dfrac{6}{29} \\ b=1 \end{array}$$

sustituyendo estos valores en las coordenadas de B y B':

$$B(3a-2,\ 2a+1,\ 4a) \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{-40}{29},\ \frac{41}{29},\ \frac{24}{29}\right)}$$

$$B'(-2b,\ b-3,\ b+2) \Rightarrow \boxed{B'(-2,\ -2,\ 3)}$$

8.51 **Sean las rectas** $r:\ \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ z=0 \end{array}\right.$, $s=\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-2\lambda \end{array}\right.$ **y el punto** $P(1,0,1)$ **.**

Hallar los planos determinados por P y r y por P y s, así como los planos bisectores de estos dos.

(Univ. de Madrid)

El haz de planos que contienen a la recta r tienen por ecuación

$$\lambda(x+y-2)+\mu z=0 \qquad (1)$$

y de todos estos planos nos interesa el que contiene al punto P (las coordenadas de P satisfacen a (1)):

$$\lambda(1+0-2)+\mu\cdot 1=0 \Rightarrow \mu=\lambda$$

sustituyendo este valor en (1), y dividiendo por λ:

$$\lambda(x+y-2)+\lambda z=0 \Rightarrow x+y-2+z=0 \Rightarrow \boxed{x+y+z-2=0} \qquad (2)$$

que es la ecuación del plano determinado por P y r.

Para hallar el plano determinado por P y s, consideraremos que este plano es el que contiene dos puntos de s y el punto P.

Haciendo $\lambda=0$ y $\lambda=1$ en las ecuaciones de la recta s, obtenemos dos puntos de s: $A(2,0,2)$ y $B(1,1,0)$. La ecuación del plano determinado por A, B y P es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ (restando a la primera y a la tercera columnas la cuarta, y desarrollando después por los elementos de la cuarta fila)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x-y-z=0} \qquad (3)$$

Los planos bisectores de los planos $x+y+z-2=0$ y $x-y-z=0$ es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos planos, sus ecuaciones son:

$$\frac{x+y+z-2}{\sqrt{1+1+1}} = \pm \frac{x-y-z}{\sqrt{1+1+1}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x+y+z-2 = x-y-z \\ \\ x+y+z-2 = -(x-y-z) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{r} \boxed{y+z-1=0} \\ \\ \boxed{x-1=0} \end{array} \right.$$

8.52 **Determinar el punto (o puntos) de la recta**

$$r: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidiste de los planos

$$\pi_1: 3x+4y-1=0 \qquad \pi_2: 4x-3z-1=0$$

(Univ. de Madrid, 1991) — (Univ. de Sevilla, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2} = \lambda \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2\lambda+1 \\ y = 3\lambda-1 \\ z = 2\lambda-2 \end{array} \right.$$

Si a es el valor de λ que nos da el punto $P(2a+1,\ 3a-1,\ 2a-2)$ que equidista de los dos planos, se tendrá:

$$\left| \frac{3(2a+1)+4(3a-1)-1}{\sqrt{9+16}} \right| = \left| \frac{4(2a+1)-3(2a-2)-1}{\sqrt{16+9}} \right| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{18a-2}{5} \right| = \left| \frac{2a+9}{5} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 18a-2 = 2a+9 \Rightarrow a = \frac{11}{16} \\ \\ 18a-2 = -(2a+9) \Rightarrow a = \frac{-7}{20} \end{array} \right.$$

— para $a = \frac{11}{16}$ obtenemos el punto $P_1\left(2\,\frac{11}{16}+1,\ 3\,\frac{11}{16}-1,\ 2\,\frac{11}{16}-2\right) = \boxed{\left(\frac{38}{16}, \frac{17}{16}, \frac{-10}{16}\right)}$

— para $a = \frac{-7}{20}$ obtenemos el punto $P_2\left(2\,\frac{-7}{20}+1,\ 3\,\frac{-7}{20}-1,\ 2\,\frac{-7}{20}-2\right) = \boxed{\left(\frac{6}{20}, \frac{-41}{20}, \frac{-54}{20}\right)}$

8.53 A: (1, 3, 2) y B: (2, 5, 1) son dos vértices de un triángulo que tiene su tercer vértice situado en un punto arbitrario (variable) de la recta:

$$r: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

Calcular el área de los diferentes triángulos formados por A, B y el tercer vértice en r: ¿El valor de dicha área depende de donde se sitúe el tercer vértice?

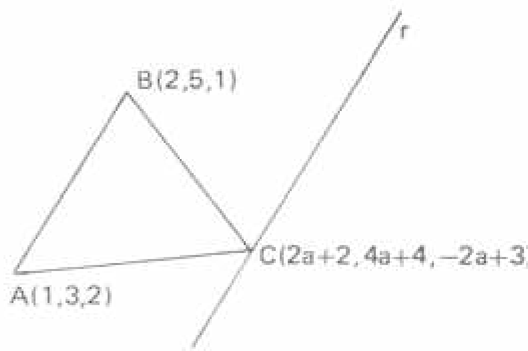
(Univ. de Castilla–La Mancha, 1991)

Hallemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{-2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = 4\lambda + 4 \\ z = -2\lambda + 3 \end{cases}$$

Sea el punto $C(2a+2, 4a+4, -2a+3)$ un punto arbitrario de la recta correspondiente a $\lambda = a$.

El área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2}|AB \wedge AC|$



$$AB = (2-1, 5-3, 1-2) = (1, 2, -1)$$

$$AC = (2a+2-1, 4a+4-3, -2a+3-2) =$$

$$= (2a+1, 4a+1, -2a+1)$$

$$AB \wedge AC = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2a+1 & 4a+1 & -2a+1 \end{vmatrix} =$$

$$u_1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4a+1 & -2a+1 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a+1 & -2a+1 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a+1 & 4a+1 \end{vmatrix} = 3u_1 - 2u_2 - u_3$$

$$\text{Area (ABC)} = \frac{1}{2}\sqrt{9+4+1} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

El área es independiente del parámetro a, lo que indica que no depende de la posición del punto C sobre la recta. Esto es debido a que la recta r es paralela al lado AB, ya que el vector AB = (1, 2, –1) es paralelo al vector (2, 4, –2) que es paralelo a r, lo que implica que la altura desde el vértice C sobre el lado AB es constante, cualquiera que sea la posición del vértice C.

8.54 **Calcular el volumen del tetraedro de vértices**

A(0, 1, 0) ; B(1, 0, 1) ; C(–2, –1, 0) y D(3, –1, 2).

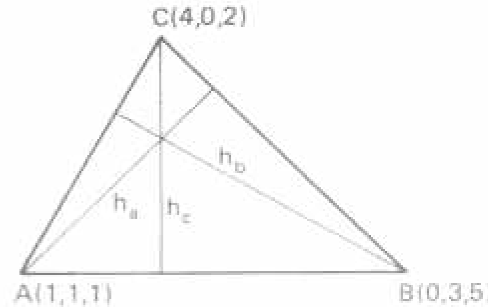
(Univ. de Salamanca)

El volumen del tetraedro ABCD es igual a $\frac{1}{6}$ del producto mixto de los vectores AB = (1,–1,1), AC = (–2,–2,0) y AD = (3,–2,2):

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-4+4+6-4) = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

8.55 **Dado el triángulo de vértices A(1, 1, 1), B(0, 3, 5) y C(4, 0, 2), hallar su área y las longitudes de sus tres alturas.**

(Univ. de Madrid)



El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores

$$AB = (-1, 2, 4) \text{ y } AC = (3, -1, 1):$$

$$AB \wedge AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6i + 13j - 5k$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 13^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{230}$$

Como el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{230} = \frac{1}{2}\cdot |AB| \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{\sqrt{230}}{|AB|} = \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{21}}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{230} = \frac{1}{2}\cdot |AC| \cdot h_b \Rightarrow h_b = \frac{\sqrt{230}}{|AC|} = \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{11}}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{230} = \frac{1}{2}\cdot |BC| \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{\sqrt{230}}{|BC|} = \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{34}}$$

8.56 **Dos de los vértices de un triángulo son A(2, 1, 0) y B(1, 2, 0). Sabiendo que el vértice C está en el plano OXY y que el área del triángulo es 2, determinar la posición del punto C.**

(Univ. de Murcia)

Si el vértice C está en el plano OXY, su tercera coordenada será nula. Sea C(x, y, 0).

El área del triángulo ABC será igual a $\frac{1}{2}\left|AB \wedge AC\right| = 2$.

– vector $AB = (1-2, 2-1, 0-0) = (-1, 1, 0)$

– vector $AC = (x-2, y-1, 0-0) = (x-2, y-1, 0)$

$$AB \wedge AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ x-2 & y-1 & 0 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-2 & y-1 \end{vmatrix} = (-x-y+3)\,k$$

$$\frac{1}{2}\left|AB \wedge AC\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-x-y+3)^2} = 2 \Rightarrow \left|-x-y+3\right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} -x-y+3=4 \\ -(-x-y+3)=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x-y+3=4 \\ x+y-3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y-7=0 \end{cases}$$

Estas son las relaciones que deben cumplir las dos primeras coordenadas del punto C, y como la tercera coordenada es nula, podemos decir que el vértice C recorre las rectas:

$$\boxed{\begin{matrix} x+y+1=0 \\ z=0 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} x+y-7=0 \\ z=0 \end{matrix}}$$

CAPITULO 9

FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL
LIMITES
CONTINUIDAD

FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL

Una *función numérica de una variable real* es una aplicación de un conjunto A de números reales en el conjunto de los números reales. O sea, es una ley que hace corresponder a cada elemento de A un número real.

La función f de A en R se simboliza así:

$$f: \ A \to R$$
$$x \mapsto f(x)$$

lo que indica que al elemento genérico $x \in A$ le corresponde el número real $f(x)$. Se dice también que $f(x)$ es el valor de la función en el punto x.

Al conjunto A se le llama *dominio, conjunto de definición, o campo de definición de* **f**, y al conjunto de los números reales cuyos elementos son los transformados, mediante f, de los elementos de A se le llama *imagen de* **f**. La imagen de A por f se simboliza por f(A).

$$f(A) = \{ y \,/\, y \in R, \text{ existe al menos un } x \in A \text{ tal que } y = f(x) \}$$

Respecto de un sistema de referencia $\{0, i, j\}$ del plano, el conjunto (C) de los puntos $M(x, y)$ del plano tales que

$$x \in A \ , \quad y = f(x)$$

se llama **gráfica** o **curva** de la función f.

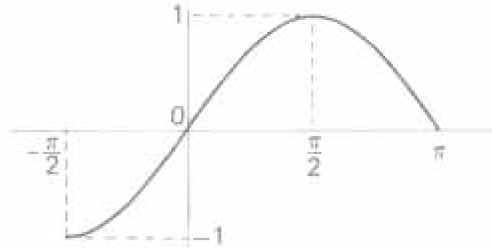
Se dice que la ecuación cartesiana de la curva (C) es $y = f(x)$.

Si $f: A \to R$ tal que $f(x) = \text{sen}\, x$:

$A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(A) = [-1, 1]$

$A = [0, \pi] \Rightarrow f(A) = [0, 1]$

$A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f(A) =]0, 1[$

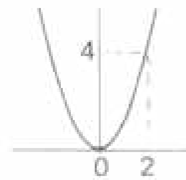


Al elemento genérico $x \in A$ se le suele llamar variable independiente, y al elemento genérico de $f(A)$, $y = f(x)$, se le suele llamar variable dependiente.

La función $f: A \to R$ está **acotada superiormente** si existe un número real C tal que para todo $x \in A$ se verifica que $f(x) \leqslant C$. A los números C que cumplen esta propiedad se les llama mayorantes o cotas superiores.

La función f está **acotada inferiormente** si existe un número real c tal que para todo $x \in A$ se verifica que $f(x) \geqslant c$. A los números c que cumplen esta condición se les llama minorantes o cotas inferiores.

La función f está **acotada** si está acotada superior e inferiormente. O bien si existe un número real positivo P tal que para todo $x \in A$ se verifica que $|f(x)| \leqslant P$.



Sea la función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$:

– si $A = [0, 2]$, la función está acotada superiormente: $\forall x \in A$, $f(x) = x^2 \leqslant 4$

la función está acotada inferiormente: $\forall x \in A$, $f(x) > -5$

la función está acotada, por estar acotada inferior y superiormente.

– si $A = R$, la función no está acotada superiormente, ya que cualquiera que sea el número real M, siempre existe un $x \in A = R$, tal que $f(x) = x^2 \geqslant M$, x puede ser cualquier número igual o mayor que $\sqrt{M}$.

la función está acotada inferiormente: $\forall x \in A$, $f(x) \geqslant 0$.

la función no está acotada, por no estarlo superiormente.

A la menor de las cotas superiores de f se le llama *extremo superior* de la función f en A, y se simboliza por $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$. A la mayor de las cotas inferiores de f se le llama *extremo inferior* de la función f en A, y se simboliza por $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

El extremo superior e inferior pueden o no pertenecer a $f(A)$.

Sea la función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$

– si $A = [0, 1]$: $M = \sup f(x) = 1$; $m = \inf f(x) = 0$, ambos pertenecen a $f(A)$.

– si $A =]0, 1[$: $M = \sup f(x) = 1$; $m = \inf f(x) = 0$, ni M ni m pertenecen a $f(A)$.

Si B es un subconjunto del conjunto de definición de la función $f: A \to R$:

– se dice que f es una **función constante** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

o bien, existe un número real k tal que: $\forall x \in B$, $f(x) = k$.

– se dice que f es una **función creciente** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \; / \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$$

– se dice que f es una **función decreciente** en B si

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \; / \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1)$$

En los dos últimos casos se dice que f es una **función monótona** en B.

– se dice que f es una función **estrictamente creciente** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \; / \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

– se dice que f es una función **estrictamente decreciente** en B si

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \; / \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

La función $f: A \to R$ tiene un **máximo relativo** en $x_o \in A$ si existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in A \ , \ x_o - \epsilon < x < x_o + \epsilon \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_o)$$

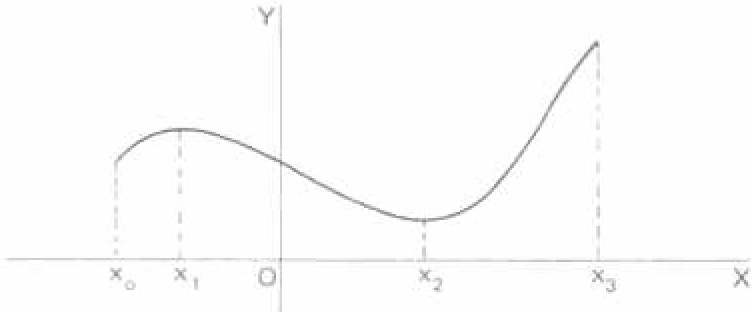
Si la desigualdad es válida para todo $x \in A$, se dice que f tiene un **máximo absoluto** en x_o.

La función $f: A \to R$ tiene un **mínimo relativo** en $x_o \in A$ si existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in A \ , \ x_o - \epsilon < x < x_o + \epsilon \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_o)$$

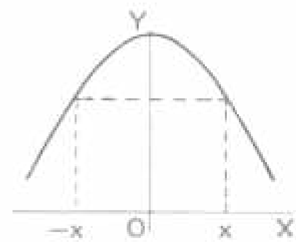
Si la desigualdad es válida para todo $x \in A$, se dice que f tiene un **mínimo absoluto** en x_o.

Se llama extremo de la función f a todo máximo o mínimo de f.



Si la gráfica de la función es la de la figura, la función f tiene en x_3 un máximo absoluto, en x_1 un máximo relativo, en x_o un mínimo relativo y en x_2 un mínimo absoluto.

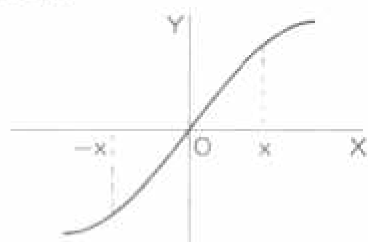
La función $f: A \to R$ es **par** si: $\begin{cases} x \in A \Leftrightarrow -x \in A \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$



La curva de toda función par es simétrica respecto del eje OY si el sistema de referencia $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ es ortonormal. Para estudiar la función f basta con hacerlo en $D = A \cap [0, +\infty[$.

La función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es par si $A = [-a, a]$ o $A =]-a, a[$, o $A = [-b, -a] \cup [a, b]$ o $A =]-b, -a[\cup]a, b[$.

La función $f: A \to R$ es **impar** si: $\begin{cases} x \in A \Leftrightarrow -x \in A \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$



La curva de toda función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas. Para estudiar la función f basta con hacerlo en $D = A \cap [0, +\infty[$.

La función $f: A \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es impar si A es cualquiera de los conjuntos del ejemplo anterior.

La función $f: A \to R$ es **periódica** si existe un número real positivo T tal que: $\begin{cases} x \in A \Leftrightarrow x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$

El *periodo* de f es el menor valor de T que verifica la propiedad anterior.

Para estudiar una función periódica de periodo T_o, basta con hacerlo en $D = A \cap [a, a + T_o]$, siendo a un número real cualquiera perteneciente a A. Se suele tomar $a = 0$ si $0 \in A$.

La función f: $R \to R$ definida por $f(x) = \text{sen } x$ es periódica de periodo 2π.

La función g: $R \to R$ definida por $g(x) = \cos x$ es periódica de periodo 2π.

La función h: $R \to R$ definida por $h(x) = \text{sen}(ax + b)$ es periódica de periodo $\frac{2\pi}{a}$

La función f: $A \to R$ es **algebraica** si existe un polinomio P con dos variables y coeficientes reales tal que $P[x, f(x)] = 0 \quad \forall x \in A$.

La función f: $R \to R$ definida por $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{3x^2+5}}$ es algebraica, ya que:

$$y^2 = \frac{(x-2)^2}{3x^2+5} \quad \Rightarrow \quad (3x^2+5)y^2 - (x-2)^2 = 0$$

Si una función no es algebraica se dice que es una función **transcendente.**

Las funciones: $x \mapsto \text{sen } x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \text{tg } x$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \log x$ son tanscendentes.

OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL.

Sean f y g dos funciones que tienen el mismo conjunto de definición A.

Se llama *suma* de las funciones f y g a la función $h = f + g$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in A$.

Si $\lambda \in R$, se llama *producto de la función* f *por el escalar* λ a la función $h = \lambda \cdot f$ definida por $h(x) = \lambda \cdot f(x)$, $\forall x \in A$.

Se llama *producto* de las funciones f y g a la función $h = f \cdot g$ definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in A$.

Si f: $[0, \pi] \to R$ definida por $f(x) = \text{sen } x$, y g: $[0, \pi] \to R$ definida por $g(x) = 3x^2 - x + 1$ se tendrá que $h = f \cdot g$: $[0, \pi] \to R$ está definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (\text{sen } x) \cdot (3x^2 - x + 1)$.

Si los conjuntos de definición de las funciones f y g son A y B, las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ están definidas en $A \cap B$.

Si f es una función de dominio A y g una función de dominio f(A), se llama **función compuesta de f por g**, a la función $h = g \circ f$ definida por $h(x) = g[f(x)] \quad \forall x \in A$.

Si f: $[0, \pi] \to R$ definida por $f(x) = \text{sen } x$, y g: $[0, 1] \to R$ definida por $g(x) = 3x^2 - x + 1$, se tendrá que $h = g \circ f$ está definida por $h(x) = g[f(x)] = 3(\text{sen } x)^2 - \text{sen } x + 1$.

Si la función f: $A \to B$ es biyectiva, se llama **función recíproca de f** y se simboliza por f^{-1}, la aplicación de B en A definida de la siguiente forma:

$$\boxed{x \in A, \quad f(x) = y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y \in B, \quad f^{-1}(y) = x}$$

En un sistema de referencia ortonormal, las curvas de las funciones f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

La función f: $[0, 4] \to [-2, 10]$ definida por $f(x) = 3x - 2$ es biyectiva, ya que cualquiera que sea $y \in [-2, 10]$ la ecuación $3x - 2 = y$, tiene una y sólo una solución: $x = \frac{y+2}{3}$. Esto implica que la función f tiene recíproca, que se define así:

$$f^{-1}: [-2, 10] \to [0, 4], \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

La función f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, tiene función recíproca, siendo $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$.

FUNCIONES ELEMENTALES DE UNA VARIABLE REAL

Función potencial: $x \mapsto x^n$

Función polinómica: $x \mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$

Función racional: $x \mapsto \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$, definida para todo $x \in \mathbf{R}$ que no anule el denominador.

Función exponencial: $x \mapsto a^x \qquad (a > 0)$

Función logarítmica: $x \mapsto \log_a x \qquad (a > 0,\ x > 0)$

Funciones circulares o trigonométricas: $x \to \operatorname{sen} x$; $x \to \cos x$; $x \to \operatorname{tg} x$; $x \to \operatorname{ctg} x$

LIMITE DE UNA FUNCION REAL EN UN PUNTO.

Sea f una función real definida en el intervalo $I \subset \mathbf{R}$, y a un punto de I.

Se dice que f tiene como límite el número real l cuando x tiende hacia a, si a todo número real positivo ϵ se puede hacer corresponder otro número real positivo δ, tal que para todo $x \in I$, $x \neq a$ y $|x-a| < \delta$, se verifica que $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$. Se escribe: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \left(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, |x-a| < \delta,\ x \in I,\ x \neq a \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \epsilon\right)}$$

l_1 es el **límite por la derecha** en el punto a $(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1)$ si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, a < x < a + \delta,\ x \in I \Rightarrow |f(x) - l_1| \leqslant \epsilon}$$

l_2 es el **límite por la izquierda** en el punto a $(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_2)$ si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, a - \delta < x < a,\ x \in I \Rightarrow |f(x) - l_2| \leqslant \epsilon}$$

Para que exista el límite de la función f cuando x tiende hacia a es necesario y suficiente que existan los límites por la derecha y por la izquierda y ambos límites sean iguales.

Se suele facilitar el cálculo del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ haciendo el cambio $x = a + h$, de donde resulta: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$. Para los límites laterales haremos $x = a + h$, $h > 0$, para el cálculo del límite por la derecha y $x = a - h$, $h > 0$, para el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a+h) \qquad ; \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ h > 0}} f(a-h)$$

Sea la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x, o el mayor número entero igual o menor que x. Veamos si existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(2+h) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(2-h) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

existen ambos límites laterales en $x = 2$, pero, como son distintos, no existe el límite ordinario de f en $x = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, |x-a| < \delta,\ x \in I \Rightarrow f(x) \geqslant M\right) \\ \hline \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, |x-a| < \delta,\ x \in I \Rightarrow f(x) \leqslant -M\right) \end{array}}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \left(\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \,/\, x > M,\quad x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert \leqslant \epsilon\right)$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \left(\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \,/\, x < -M,\quad x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert \leqslant \epsilon\right)$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \left(\forall M > 0,\ \exists P > 0 \,/\, x > P,\quad x \in I \Rightarrow f(x) > M\right)$

De la misma forma se definen: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Si existe el $\lim_{x \to a} f(x)$, este límite es único.

CALCULO DE LIMITES.

— $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ (si no resulta: $\infty - \infty$)

— si $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lim_{x \to a} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

— $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)] \cdot [\lim_{x \to a} g(x)]$ (si no resulta: $0 \cdot \infty$)

— si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (si no resulta: $\frac{\infty}{\infty}$)

— si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$): $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

— si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$: $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ (o $-\infty$)

— si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y la función g está acotada: $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

— si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$: $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)}$ (si no resulta: ∞^0 ó 1^∞)

— si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$: $\lim_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b [\lim_{x \to a} f(x)]$

— $\lim_{x \to a} \lvert f(x) \rvert = \lvert \lim_{x \to a} f(x) \rvert$

— si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim_{y \to b} g(y) = l$: $\lim_{x \to a} [g \circ f](x) = \lim_{x \to a} g[f(x)] = l$

— si en un entorno de a se verifica que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} h(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

y si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$, se tiene que $\lim_{x \to a} h(x) = l$

FUNCIONES EQUIVALENTES EN UN PUNTO. Las funciones f y g son equivalentes en el punto a (a finito, $+\infty$ ó $-\infty$) si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Se dice que la función f es un *infinitésimo* en el punto a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Si la función f es un infinitésimo en el punto a y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = k \quad \text{(finito distinto de 0)}$$

se dice que f es un *infinitésimo de orden n* en el punto a, siendo $k(x-a)^n$ la *parte principal* del infinitésimo f en el punto a. Los infinitésimos equivalentes tienen igual parte principal.

Las funciones $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y $g: R \to R$ definida por $g(x) = (x-1)^2$ son infinitésimos en el punto 1, ya que:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x + 2) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

Como $x = 1$ es raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$, rebajamos de grado por Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x-1)^2 (x+2)$$

Las funiones f y g no son equivalentes en el punto 1, ya que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3 \neq 1$$

La función f es un infinitésimo de orden 2 en el punto 1, siendo su parte principal $3(x-1)^2$.

Las equivalencias más usadas son:

$\operatorname{sen} x \approx x$	en 0	$\operatorname{arc\,sen} x \approx x$	en 0	$e^x - 1 \approx x$	en 0
$\operatorname{tg} x \approx x$	en 0	$\operatorname{arc\,tg} x \approx x$	en 0	$a^x - 1 \approx x \log a$	en 0
$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$	en 0	$\log(1+x) \approx x$	en 0	$\log x \approx x - 1$	en 1

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p$ es un polinomio donde $n > p$, $a_n \neq 0$ y $a_p \neq 0$:

$$f(x) \approx a_n x^n \text{ en } \infty ; \qquad f(x) \approx a_p x^p \text{ en } 0$$

En el cálculo de los límites se puede sustituir cualquier infinitésimo, que esté como factor o divisor, por otro infinitésimo equivalente o por su parte principal.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)(\operatorname{sen} x)^2}{x \cdot \operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1) \cdot x^2}{x \cdot x} = \lim_{x \to 0} (x+1) = 1$$

LIMITES INDETERMINADOS. Existen siete tipos, expresados simbólicamente así:

$\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	0^0	∞^0	1^∞

No hay reglas fijas para calcular estos tipos de límites, pero la mayoría se pueden llevar al tipo $\frac{0}{0}$, lo que nos permite aplicar la regla de L'Hopital que veremos en el capítulo 11.

El tipo $\infty - \infty$, cuando $\lim f(x) = +\infty$ y $\lim g(x) = -\infty$, se lleva al tipo $\frac{0}{0}$ así:

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

El límite $0\cdot\infty$, cuando $\lim f(x) = 0$ y $\lim g(x) = \infty$, se lleva al tipo $\frac{0}{0}$ así:

$$\lim [f(x)\cdot g(x)] = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Los límites de los tipos 0^0, ∞^0 y 1^∞, se suelen hallar empleando la igualdad: $A^B = e^{B\cdot\log A}$.

En el caso 1^∞, cuando $\lim f(x) = 1$ y $\lim g(x) = \infty$:

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim[g(x)\cdot\log f(x)]} = e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x+5}{x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\frac{x+5-x}{x}} = e^5$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

Sea f una función real definida en el intervalo $I \subset R$, y a un punto de I.

Se dice que la función f es **continua** en el punto a sí y solo sí existe el límite de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

O lo que es lo mismo: La función f es continua en el punto a si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1º La función f está definida en a, es decir, existe $f(a)$.

2º Existe el $\lim_{x\to a} f(x)$.

3º $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

la función f es continua en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = f(a)$

La función f es **continua por la derecha** en el punto a sí y solo sí existe el límite por la derecha de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

la función f es continua por la derecha en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = f(a)$

La función f es **continua por la izquierda** en el punto a si y solo si existe el límite por la izquierda de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

la función f es continua por la izquierda en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h) = f(a)$

La función f es continua en el punto a si es continua por la derecha y por izquierda en el punto a.

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x. Veamos si la función es continua en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} E(1-h) = 0 \\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} E(1+h) = 1 \\ f(1) = E(1) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lim f(1-h) \neq \lim f(1+h) = f(1) \Rightarrow$$

la función f es continua por la derecha en el punto 1, no es continua por la izquierda en el punto 1 y no es continua en el punto 1.

Si la función f no es continua en $x = a$, se dice que a es un *punto de discontinuidad* de f.

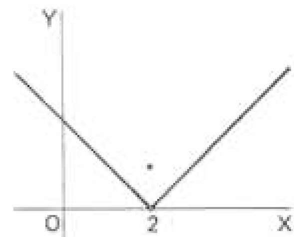
Tres casos de discontinuidad pueden presentarse:

a) Existen y son iguales los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a, pero estos límites son distintos de f(a). Se dice que la función f tiene una *discontinuidad evitable.*

La función g deducida de f cambiando solamente su valor en el punto a, $g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, es continua en el punto a. Se dice que la función g se ha obtenido de la función f por *prolongación de continuidad.*

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es discontinua en $x = 2$:

Considerando que $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} [-(2-h)+2] = \lim\limits_{h \to o} h = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} [(2+h)-2] = \lim\limits_{h \to o} h = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

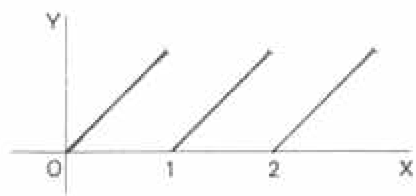
$$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2+h) \neq f(2) \quad \Rightarrow \quad \text{la función f no es continua en } x = 2.$$

La función $g: R \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$

La función g se ha obtenido de la función f por *prolongación de continuidad.*

b) Existen los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a, pero son distintos. Se dice que la función f tiene una *discontinuidad de primera especie* en el punto a.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x - E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x, tiene en el punto $x = 2$ una discontinuidad de primera especie:



$$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} [(2-h) - E(2-h)] = \lim\limits_{h \to o} (2-h-1) = 1$$

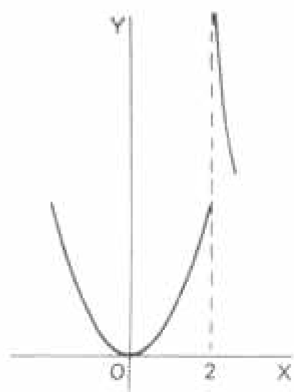
$$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} [(2+h) - E(2+h)] = \lim\limits_{h \to o} (2+h-2) = 0$$

c) Uno al menos, de los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a no existe o es infinito. Se dice que la función f tiene una *discontinuidad de segunda especie* en el punto a.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ tiene en el punto $x = 2$ una discontinuidad de segunda especie:

$$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} (2-h)^2 = 4$$

$$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{1}{(2+h)-2} = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{1}{h} = +\infty$$



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN PUNTO.

Si f y g son continuas en el punto *a*, también son continuas en dicho punto las funciones:

$$f+g \; ; \quad \lambda f \quad \forall \lambda \in R \; ; \quad \frac{f}{g} \quad \text{si} \quad g(a) \neq 0 \; ; \quad |f|$$

Si f es continua en el punto *a* y g es continua en el punto $b = f(a)$, la función $g \circ f$ es continua en *a*.

Si la función f es continua en el punto *a*, existe un entorno de *a* donde la función está acotada.

Si la función f es continua en el punto *a* y es $f(a) \neq 0$, existe un entorno de *a* tal que la función no se anula en ninguno de sus puntos y el signo de $f(x)$ en los puntos de dicho entorno es el de $f(a)$.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

La función f es *continua en el intervalo abierto* $]a, b[$ si es continua en todo punto de $]a, b[$.

La función f es *continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto $]a, b[$, continua por la derecha en el punto *a* y continua por la izquierda en el punto *b*.

La imagen de un intervalo cerrado, por una función continua, es un intervalo cerrado.

Las funciones polinómicas son continuas en todo intervalo real.

Las funciones racionales: $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, son continuas en todo intervalo real que no contenga ningún punto que anule el denominador.

Las funciones trigonométricas: $x \mapsto \operatorname{sen} x$, $x \mapsto \cos x$ son continuas en todo intervalo de R.

La función trigonométrica: $x \mapsto \operatorname{tg} x$ es continua en todo intervalo real que no contenga ningun punto de la forma $(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$, siendo k un número entero.

La función potencial: $x \mapsto x^{\alpha}$, siendo α un número real cualquiera, es continua en todo intervalo de $]0, +\infty[$.

La función exponencial: $x \mapsto a^x$, siendo $a > 0$, es continua en todo intervalo de R.

La función logarítmica: $x \mapsto \log_a x$, siendo $a > 0$, es continua en todo intervalo de $]0, +\infty[$.

Teorema de Weiertrass. Si la función f es continua en el intervalo $I = [a, b]$, cerrado y acotado (compacto), alcanza en él, al menos una vez, su máximo y mínimo absolutos.

Teorema de los valores intermedios. Si la función f es continua en el intervalo I (acotado o no) y $m = \inf_{x \in I} f(x)$ y $M = \sup_{x \in I} f(x)$, para todo número real λ tal que $m < \lambda < M$, existe al menos un $x_o \in I$ tal que $f(x_o) = \lambda$.

Si la función f es continua en el intervalo compacto $I = [a, b]$, para todo número real λ comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un $x_o \in I$ tal que $f(x_o) = \lambda$.

Teorema de Bolzano. Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, teniendo $f(a)$ y $f(b)$ signos opuestos, es decir, $f(a)\cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

La ecuación $x^3 + 5x + 2 = 0$ tiene al menos una raíz real.

En efecto, sea f la función definida por $f(x) = x^3 + 5x + 2$, que por ser una función polinómica es continua en R

$$f(-1) = -1 - 5 + 2 = -4 \; ; \quad f(1) = 1 + 5 + 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad f(-1)\cdot f(1) < 0 \quad \Rightarrow$$

por el teorema de Bolzano, al ser la función continua en $[-1, 1]$, existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

PROBLEMAS

9.1 Calcular $$E = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$$

(Univ. de Badajoz)

El denominador se anula para $x = 3$.

Veamos qué valor toma el numerador para $x = 3$. Aplicando Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 9 & -27 \\ 3 & & 3 & 0 & 27 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = (x-3)(x^2+9)$$

de donde: $$E = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x+3} = \frac{9+9}{3+3} = \boxed{3}$$

9.2 **Determinar a para que se verifique**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = 2$$

(Univ. de Sevilla)

Multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión entre paréntesis, y considerando que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(x^2 + ax + 1) - x^2}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} =$$

(dividiendo numerador y denominador por x)

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{a+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

9.3 **Calcular** $E = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$

(Univ. de Madrid, 1991)

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,(x+a-x)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{1+1} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

9.4 **Calcular el límite de la función**

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

al tender x respectivamente hacia 0, 1 y $+\infty$.

(Univ. de Pamplona)

Si x tiende hacia 0 tenemos un límite del tipo $\frac{0}{0}$.

De $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, haciendo $a = b = \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2};$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

Si x tiende hacia 1 no tenemos indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos 1}{1} = 1 - \cos 1 \quad \text{(se entiende coseno de un radián)}$$

Si x tiende hacia infinito, como $\forall x: \ -1 \leq \cos x \leq 1$, el numerador de $f(x)$ está acotado, y el denominador tiende a infinito, luego el límite es 0.

9.5 **Calcular** $E = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$.

(Univ. de Málaga)

Al existir una expresión exponencial, cuando nos dicen que $x \to \infty$, habrá que diferenciar, al calcular el límite, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Para $x \to +\infty$, tenemos un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo numerador y denominador por e^x:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}{1 + \frac{\cos x}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$$

ya que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$ por tratarse del cociente de una expresión acotada, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, por otra que tiende a infinito. Lo mismo ocurre con $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{e^x} = 0$.

Para $x \to -\infty$, haciendo el cambio $x = -t$, para $x \to -\infty$, $t \to +\infty$:

$$E = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t} + \operatorname{sen}(-t)}{e^{-t} + \cos(-t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^t} - \operatorname{sen} t}{\frac{1}{e^t} + \cos t}$$

en un entorno de $+\infty$: $\dfrac{\frac{1}{e^t} - \operatorname{sen} t}{\frac{1}{e^t} + \cos t} \approx \dfrac{0 - \operatorname{sen} t}{0 + \cos t} = -\operatorname{tg} t$, tomando $\operatorname{tg} t$ todos los valores del intervalo $]-\infty, +\infty[$, lo que nos dice que no existe el límite pedido.

9.6 **Calcular** $E = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

(Univ. de Madrid)

Es un límite del tipo 1^{∞}.

$$E = e^{\lambda}, \text{ siendo } \lambda = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} - 1\right)x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3-2x+1}{2x-1} \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4}{2-0} = 2 \Rightarrow \boxed{E = e^2}$$

9.7 **Calcular el valor de la constante c para que el límite de la función**

$$f(x) = \left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx}$$

sea e al tender x hacia $+\infty$.

(Univ. de Pamplona)

Es un límite del tipo 1^{∞}:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\lambda}, \quad \text{siendo} \quad \lambda = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x} - 1\right) cx = \lim_{x \to +\infty} \frac{3cx}{x} = 3c \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{3c} = e \Rightarrow c = \boxed{\frac{1}{3}}$$

9.8 **Calcular** $$E = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Es un límite del tipo $1^{+\infty}$

$$E = e^{\lambda}\ ;\ \text{siendo } \lambda = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x} - 1\right)\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\operatorname{tg} x - 1 - \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,\frac{1}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{1+0}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{1} = 1\cdot \frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = e^0 = \boxed{1}$$

9.9 **Probar que la función f definida por**

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en $x = 1$. Indicar qué tipo de discontinuidad se presenta en dicho punto.

(Univ. de La Laguna–Tenerife)

La función no es continua en $x = 1$ puesto que en este punto no existe la función, el denominador se hace 0 y la división por 0 no existe.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^2-1}{(1-h)^3+7(1-h)-8} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-2h+h^2-1}{1-3h+3h^2-h^3+7-7h-8} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-2h+h^2}{-10h+3h^2-h^3} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-2+h}{-10+3h-h^2} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^2-1}{(1+h)^3+7(1+h)-8} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1+2h+h^2-1}{1+3h+3h^2+h^3+7+7h-8} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2h+h^2}{10h+3h^2+h^3} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2+h}{10+3h+h^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son iguales, la función f tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable.

La función $g:\ R \to R$ definida por $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8} & \text{si } x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{5} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$

La función g se ha obtenido de la función f por prolongación de continuidad.

9.10 **Estudiar la continuidad de la función $f: R \to R$, definida por $f(x) = x - E(x)$.**
$E(x)$ designa la "parte entera de x", esto es, el mayor entero menor o igual que x.

(Univ. de Madrid)

Si $a \in \mathbf{Z}$: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((a-h) - E(a-h)\big) = \lim\limits_{h\to 0} \big(a-h-(a-1)\big) = \lim\limits_{h\to 0} (1-h) = 1$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((a+h) - E(a+h)\big) = \lim_{h\to 0} (a+h-a) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, *la función no es continua en el punto a, si a es un número entero.*

Si $a \notin \mathbf{Z}$, sea $a = b + k$, siendo b un número entero y $0 < k < 1$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((a-h) - E(a-h)\big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((b+k-h) - E(b+k-h)\big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (b+k-h-b) = k$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((a+h) - E(a+h)\big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \big((b+k+h) - E(b+k+h)\big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (b+k+h-b) = k$$

$$f(a) = f(b+k) = (b+k) - E(b+k) = b+k-b = k$$

como $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a-h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = f(a)$, *la función es continua en el punto a, si a no es un número entero.*

9.11 **Hallar a y b de modo que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{para } x < 0 \\ \text{sen}\,(b+x) & \text{"} \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{x} & \text{"} \quad x > \pi \end{cases}$$

(Univ. de la Laguna – Tenerife)

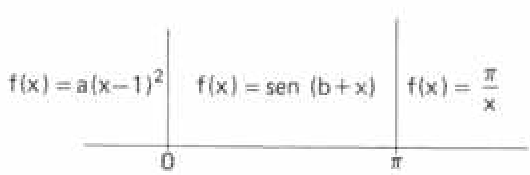
Sólo hay problema de continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, en los que cambia la forma de la función, pues en los demás puntos la función está definida por expresiones polinómicas, trigonométricas y racionales.

La función será continua en $x = 0$ si: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = f(0)$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \text{sen}\,(b+h) = \text{sen}\, b$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} a(-h-1)^2 = a$$

$$f(0) = a(0-1)^2 = a$$



La función será continua en $x = 0$ si: $\text{sen}\, b = a$ (1)

La función será continua en $x = \pi$ si: $\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi + h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi - h) = f(\pi)$.

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi + h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{\pi}{\pi + h} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi - h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \operatorname{sen}[b + (\pi - h)] = \operatorname{sen}(b + \pi)$$

$$f(\pi) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

La función será continua en $x = \pi$ si: $\operatorname{sen}(b + \pi) = 1 \Rightarrow b + \pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{b = (2k - 1)\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Llevando este valor a (1): $a = \operatorname{sen}\left((2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

9.12 **Estudiar en el campo real la continuidad de la función f definida por**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x + 1} & \text{para } x \leqslant 0 \\ x^2 + 1 & \text{"} \quad x > 0 \end{cases}$$

(Univ. de Málaga)

$\forall a < 0$: $\lim\limits_{h \to o} f(a + h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \dfrac{e^{a+h}}{e^{a+h} + 1} = \dfrac{e^a}{e^a + 1} = f(a) \Rightarrow$ la función es continua.

$\forall a < 0$: $\lim\limits_{h \to o} f(a + h) = \lim\limits_{h \to o} [(a + h)^2 + 1] = a^2 + 1 = f(a) \Rightarrow$ la función es continua.

Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 - h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{e^{o-h}}{e^{o-h} + 1} = \frac{e^o}{e^o + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \\ &\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} [(0 + h)^2 + 1] = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 - h) \neq \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 + h)$$

la función no es continua en $x = 0$.

De todo lo anterior resulta que la función es continua en el conjunto $\mathbf{R} - \{0\}$

9.13 **Determinar los números reales a y b, para que la función f definida en R por:**

$$f(x) = a\,e^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} + b\cos x, \quad \text{si } x < 0,$$

$$f(0) = 6,$$

$$f(x) = 3a\frac{\operatorname{sen} x}{x} + b(x - 1), \quad \text{si } x > 0,$$

se continua en toda la recta real.

(Univ. Valladolid, 1991)

Hay problema de continuidad en $x = 0$, pues las expresiones $\frac{\text{sen}^2 x}{x}$ y $\frac{\text{sen } x}{x}$ no existen para $x = 0$.

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0-h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \left(a\, e^{\frac{\text{sen}^2 (0-h)}{0-h}} + b \cos(0-h) \right) = a\, e^{\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \text{sen}(-h) \cdot \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{\text{sen}(-h)}{-h}} +$$

$$+ \, b \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \cos(-h) = a\, e^{0 \cdot 1} + b \cdot 1 = a e^{o} + b = a + b$$

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0+h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \left(3a \, \frac{\text{sen}(0+h)}{0+h} + b(0+h-1) \right) = 3a \cdot 1 + b(-1) = 3a - b$$

La función será continua en $x = 0$ si se verifica:

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0-h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0+h) = f(0) \Rightarrow a + b = 3a - b = 6 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4a = 12, \; \boxed{a = 3} \; ; \; b = 6 - a = 6 - 3 = 3 \; ; \; \boxed{b = 3}$$

9.14 **Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación**

$$x^3 + x - 5 = 0$$

tiene al menos una solución x_o tal que $1 < x_o < 2$.

(Univ. de Barcelona)

La función f: $[1, 2] \to R$ definida por $f(x) = x^3 + x - 5$ es continua, ya que es una función polinómica.

$$f(1) = 1 + 1 - 5 = -3 < 0$$
$$f(2) = 8 + 2 - 5 = \quad 5 > 0$$

Si la función f es continua en el intervalo $[1, 2]$ y $f(1) \cdot f(2) < 0$, el teorema de Bolzano nos dice que existe al menos un número real $x_o \in]1, 2[$ tal que $f(x_o) = 0$, o lo que es lo mismo, existe al menos una raiz x_o de la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tal que $1 < x_o > 2$.

9.15 **¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo $]-1, 0[$? ¿Y del $]1, 0[$?**

(Univ. de León)

$$f(-1) = -1 + 1 - 7(-1) + 1 = 8 \; ; \quad f(0) = 1 \; ; \quad f(1) = 1 + 1 - 7 + 1 = -4$$

La función, por ser polinómica, es continua en el intervalo $[0, 1]$, siendo además $f(0) \cdot f(1) < 0$. El teorema de Bolzano nos dice que existe al menos un punto $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$. Esto implica que la gráfica de la función corta al eje de abscisas al menos en un punto del intervalo $]0, 1[$.

No se puede afirmar que la gráfica corte al eje de abscisas en un punto del intervalo $]-1, 0[$, pues aunque la función es continua en $[-1, 0]$, no se verifica que $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

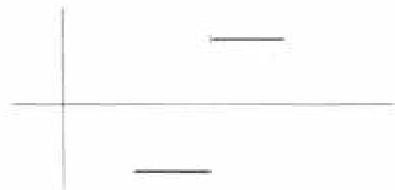
9.16 **¿Puede existir una función f, acotada en [1, 3], con $f(1) < 0$, $f(3) > 0$, y tal que no exista $c \in]1, 3[$ con $f(c) = 0$?**

(Univ. de León)

Si la función f es continua en el intervalo [1, 3], al ser $f(1) < 0$ y $f(3) > 0$, existirá al menos un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$. (Teorema de Bolzano).

Si la función f no es continua en [1, 3], no tiene por qué cumplirse dicha propiedad. Por ejemplo, la función $f: [1, 3] \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]2, 3] \end{cases}$$



no es continua en $x = 2$.

No existe $c \in]1, 3[$ tal que $f(c) = 0$.

9.17 **Sean F y G dos funciones continuas en [a, b] y tales que $F(a) > G(a)$ y $G(b) > F(b)$. Demostrar que sus gráficas se cortan.**

(Univ. de Cantabria) y (Univ. de Murcia)

Si las funciones F y G son continuas en el intervalo [a, b], la función $E = F - G$ es continua en [a, b].

$$F(a) > G(a) \Rightarrow E(a) = F(a) - G(a) > 0 \quad ; \quad G(b) > F(b) \Rightarrow E(b) = F(b) - G(b) < 0$$

Si la función $E = F - G$ es continua en el intervalo [a, b] y verifica que $E(a) > 0$ y $E(b) < 0$, existe al menos un punto $t \in]a, b[$ en el que $E(t) = 0$, o sea:

$$\exists t \in]a, b[\quad / \quad E(t) = F(t) - G(t) = 0 \quad \Rightarrow F(t) = G(t)$$

Esto implica que las gráficas de las dos funciones se cortan al menos en un punto $t \in]a, b[$.

9.18 **Probar que las gráficas de $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$** (log = logaritmo neperiano) **se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.**

(Univ. Castilla – La Mancha, 1991)

La función f es continua para $\forall x > 0$ y la función g para $\forall x \in R$.

Consideremos la función F definida por $F(x) = \log x - e^{-x}$:

$$F(1) = \log 1 - e^{-1} = 0 - \frac{1}{e} < 0 ; \quad F(e) = \log e - e^{-e} = 1 - \frac{1}{e^e} > 0$$

siendo F continua en el intervalo [1, e].

Según el teorema de Bolzano, existe $a \in]1, e[$ tal que $F(a) = 0$.

$$F(a) = 0 \Rightarrow \log a - e^{-a} = 0 \Rightarrow \log a = e^{-a} \Rightarrow$$

las gráficas de $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en un punto del intervalo abierto]1, e[.

9.19 **Probar que la ecuación**

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene siempre alguna solución real.

¿Es también esto cierto para $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

(Univ. de Sevilla, 1991)

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es continua por ser una función polinómica.

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,(1 + 0 + 0 + 0) = +\infty \ ; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,(1 + 0 + 0 + 0) = -\infty$$

esto implica que existe un número M suficientemente grande tal que $f(-M)\cdot f(M) < 0$, y por el teorema de Bolzano, al ser la función f continua en $[-M, M]$ y ser $f(-M)\cdot f(M) < 0$, existe $c \in\,]-M, M[$ tal que $f(c) = 0$. O sea que la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos una raiz real.

La función $g: R \to R$ definida por $g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es continua.

$$g(x) = x^4\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4}\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

Nada podemos asegurar sobre si $g(x) = 0$ tiene o no raices reales.

9.20 **Calcular a para que exista y sea finito**

$$E = \lim_{x \to +\infty}\left((x^2 + x)^a - x\right)$$

Para ese valor de a, calcular dicho límite.

(Univ. de Sevilla, 1991)

$$E = \lim_{x \to +\infty}\left([\,x(x+1)\,]^a - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(x^a(x+1)^a - x\right) \qquad (1)$$

Considerando el desarrollo del binomio de Newton:

$$(x + y)^a = x^a + \binom{a}{1}x^{a-1}y + \binom{a}{2}x^{a-2}y^2 + \cdots$$

haciendo $y = 1$: $\quad (x+1)^a = x^a + a\,x^{a-1} + \dfrac{a(a-1)}{2!}\,x^{a-2} + \cdots = x^a + a\,\dfrac{x^a}{x} + \dfrac{a(a-1)}{2}\,\dfrac{x^a}{x^2} + \cdots$

sustituyendo en (1): $\quad E = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^{2a} - x + a\,\dfrac{x^{2a}}{x} + \dfrac{a(a-1)}{2}\,\dfrac{x^{2a}}{x^2} + \cdots\right) \qquad (2)$

– si $2a = 1, a = \dfrac{1}{2}$: $\quad E = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x - x + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}\,\dfrac{x}{x^2} + \cdots\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\,\dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{2}$

– si $2a = 1 + h$, siendo $h > 0$, la expresión (2) queda de la forma:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{1+h} - x + a \frac{x^{1+h}}{x} + \frac{a(a-1)}{2} \frac{x^{1+h}}{x^2} + \cdots \right) = \lim_{x \to +\infty} x^{1+h} \left(1 - \frac{1}{x^h} + a \frac{1}{x} + \frac{a(a-1)}{2} \frac{1}{x^2} + \cdots \right) =$$

$$= +\infty (1 - 0 + 0 + 0 + \cdots) = +\infty$$

– si $2a = 1 - h$, siendo $h > 0$, la expresión (2) queda de la forma:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{1-h} - x + a \frac{x^{1-h}}{x} + \frac{a(a-1)}{2} \frac{x^{1-h}}{x^2} + \cdots \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(x^{-h} - 1 + a \frac{x^{-h}}{x} + \frac{a(a-1)}{2} \frac{x^{-h}}{x^2} + \cdots \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{x^h} - 1 + a \frac{1}{x^{1+h}} + \frac{a(a-1)}{2} \frac{1}{x^{2+h}} + \cdots \right) = +\infty (0 - 1 + 0 + 0 + \cdots) = -\infty$$

De todo lo anterior resulta que la solución pedida es:

$$\boxed{a = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{E = \frac{1}{2}}$$

CAPITULO 10

DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

Sea la función f definida en un entorno de x_o.

Se llama incremento de la función f en el punto x_o a:

$$\Delta y_o = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

La función f es **derivable** en el punto x_o si existe el límite de $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ cuando x tiende a x_o.

Si la función f es derivable en el punto x_o, al límite anterior se llama **derivada** de la función f en el punto x_o. Se simboliza por $f'(x_o)$, o por $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_o}$, o por $Df(x_o)$:

$$\boxed{f'(x_o) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o} = Df(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}$$

Si $x = x_o + \Delta x_o$, la derivada de f en el punto x_o se puede expresar así:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{\Delta x_o \to o} \frac{f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)}{\Delta x_o}}$$

Para facilitar la escritura haremos $\Delta x_o = h$, con lo que tendremos:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}}$$

Hallemos la derivada de la función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ en el punto $x_o = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to o} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to o} (2a + h) = 2a$$

La función f es **derivable por la derecha** (respectivamente **por la izquierda**) si existe el límite por la derecha (resp. por la izquierda) de $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ cuando x tiende a x_o. La derivada por la derecha la simbolizaremos por $f'(x_o^+)$ y la derivada por la izquierda por $f'(x_o^-)$, o bien por $f'(x_o)^+$ y $f'(x_o)^-$:

$$\boxed{f'(x_o^+) = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}}$$

$$\boxed{f'(x_o^-) = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{f(x_o - h) - f(x_o)}{-h}}$$

Para que la función f sea derivable en x_o, es necesario y suficiente que f sea derivable por la derecha y por la izquierda en x_o y que $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$. Se tendrá en este caso que $f'(x_o) = f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$.

Veamos si es derivable en los puntos 0 y -1 la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 & \text{"} \quad 0 > x > -1 \\ -2x-1 & \text{"} \quad -1 \geq x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{h\to o \\ h>o}} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to o \\ h>o}} \dfrac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0}{h} = \lim\limits_{h\to o} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = \lim\limits_{h\to o} \dfrac{h}{h} = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{h\to o \\ h>o}} \dfrac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim\limits_{\substack{h\to o \\ h>o}} \dfrac{(-h)^2 - \operatorname{sen} 0}{-h} = \lim\limits_{h\to o} \dfrac{h^2}{-h} = \lim\limits_{h\to o} (-h) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow$ la función f no es derivable en 0.

$$f'(-1^+) = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{(-1+h)^2 - [-2(-1)-1]}{h} = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to o} (-2+h) = -2$$

$$f'(-1^-) = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h} = \lim_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{[-2(-1-h)-1] - [-2(-1)-1]}{-h} = \lim_{h\to o} \frac{2h}{-h} = -2$$

$f'(-1^+) = f'(-1^-) \Rightarrow$ la función es derivable en -1, siendo $f'(-1) = -2$.

Si la función f es derivable en el punto x_o es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto, la función f puede ser continua en un punto x_o y no ser derivable en él.

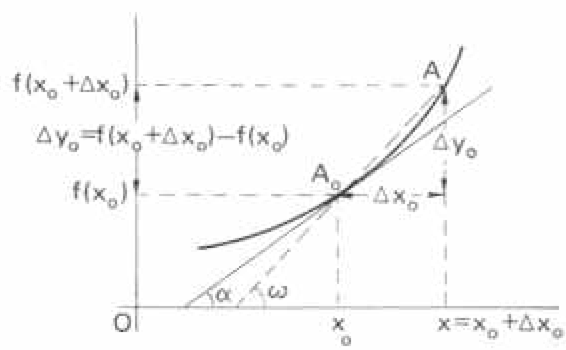
La función del último ejemplo es continua en el punto 0 y no es derivable en dicho punto.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Sea (C) la curva de la función f respecto de un sistema de referencia ortonormal.

La tangente en A_o es la posición límite (si existe) de la secante A_oA cuando el punto A tiende hacia A_o sobre la curva (C).

Cuando A tiende hacia A_o sobre la curva (C), x tiende hacia x_o, y el ángulo ω que forma la recte A_oA con el eje OX tiende hacia el ángulo α que forma la tangente en A_o con el eje OX.



$$\lim_{\Delta x_o \to o} \operatorname{tg} \omega = \lim_{\Delta x_o \to o} \frac{f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)}{\Delta x_o} = f'(x_o) = \operatorname{tg} \alpha$$

o sea que la derivada de la función f en el punto x_o es igual al coeficiente angular de la tangente a la curva de f en el punto $A(x_o, f(x_o))$. La ecuación de dicha tangente es:

$$\boxed{y - f(x_o) = f'(x_o) \cdot (x - x_o)}$$

Cálculo de la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 + 3x^2 - 6$ en el punto de abscisa $x = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \;;\quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 24 \;;\quad f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 = 12$$

de donde, la ecuación de la tangente es: $y - 12 = 24\,(x - 2)$

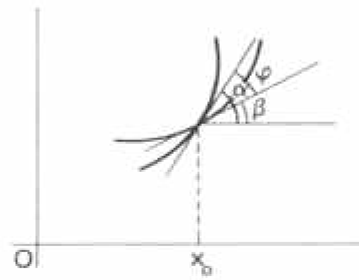
El ángulo bajo el que se cortan dos curvas es igual al ángulo que forman sus tangentes en el punto de corte.

Sean las curvas de ecuaciones

$$y = f(x) \quad ; \quad y = g(x)$$

y x_o la abscisa de su punto de corte:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o) \cdot g'(x_o)}$$



Cálculo del ángulo bajo el que se cortan las curvas de ecuaciones:

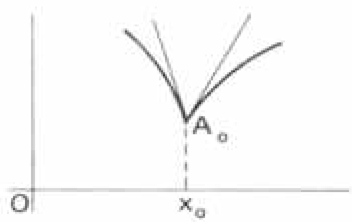
$$y = x^2 - 5x + 6 \;;\quad y = x^2 - x - 2$$

Abscisa del punto de corte: $x^2 - 5x + 6 = x^2 - x - 2 \;;\quad 8 = 4x \;;\quad x = 2$

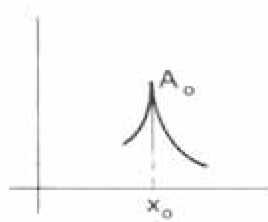
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - 5 \;;\quad f'(2) = 4 - 5 = -1 \\ g'(x) = 2x - 1 \;;\quad g'(2) = 4 - 1 = \;\;3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1-3}{1+(-1)\cdot 3} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$$

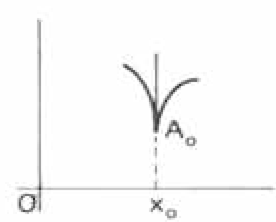
Las definiciones de derivadas por la derecha y por la izquierda tienen una interpretación geométrica en las semirrectas tangentes a la curva (C) de la función en el punto $A_o(x_o, y_o)$:

— las derivadas por la derecha y por la izquierda en x_o no son iguales: $f'(x_o^+) \neq f'(x_o^-)$. La curva (C) de la función admite dos semitangentes y el punto A_o es un *punto anguloso.*

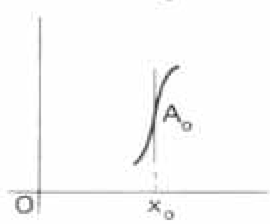


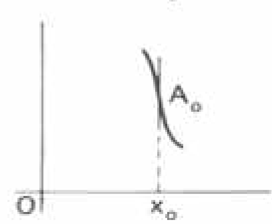
— si $f'(x_o^+) = +\infty$ y $f'(x_o^-) = -\infty$ (o bien $f'(x_o^+) = -\infty$ y $f'(x_o^-) = +\infty$), las semitangentes coinciden y son verticales. El punto A_o es un punto *cuspidal* o *de retroceso.*





— si $f'(x_o^+) = f'(x_o^-) = +\infty$ (o bien $f'(x_o^+) = f'(x_o^-) = -\infty$), el punto A_o es un punto de inflexión con tangente vertical.





FUNCION DERIVADA.

Sea la función $f: D \to R$, y sea $E \subset D$ el conjunto de todos los puntos de D en los que la función f es derivable. Se llama **función derivada** de f a la función $f': E \to R$ que hace corresponder a cada punto $x_o \in E$ el número real $f'(x_o)$, valor de la derivada de f en el punto x_o.

La función $f:]a,b[\to R$ es una *función derivable* en $]a,b[$ si es derivable en todo punto $x_o \in]a,b[$.

La función $f: [a,b] \to R$ es una *función derivable* en $[a,b]$ si es derivable en todo punto $x_o \in]a,b[$, derivable por la derecha en a y derivable por la izquierda en b.

Si f' es derivable en $F \subset E$, se llama **derivada segunda** de f, y se simboliza por f'' o $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, la derivada de f'. Más general, se llama **derivada n-sima** (o derivada de orden n) de f, y se simboliza por $f^{(n}$ o $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ la derivada de $f^{(n-1}$.

Se dice que la función f es una *función de clase* C^n en un intervalo I si f admite en I una derivada de orden n. La función f es una *función de clase* C^∞ en el intervalo I si f tiene en I derivadas de todos los órdenes. La función f es una *función de clase* C^0 en el intervalo I si f es continua en I.

La función $f: [0,1] \to R$ definida por $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ es de clase C^1, ya que $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ existe para todo $x \in [0,1]$, pero $f''(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$ no existe para $0 \in [0,1]$.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es de clase C^∞.

Derivada de la suma, producto y cociente de funciones:

$$(f + g + \cdots + j)' = f' + g' + \cdots + j'$$

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad ; \quad (f\cdot g\cdot h)' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$, para todo x que no anule el denominador

DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA:

Sea f una función derivable en el intervalo I y g una función derivable en $f(I)$. La función compuesta $F = g \circ f$ es derivable en el intervalo I, verificándose $\forall x_o \in I$:

$$\boxed{F'(x_o) = (g \circ f)'(x_o) = g'[f(x_o)]\cdot f'(x_o)}$$

Este resultado se suele presentar así: Si las funciones f y g están expresadas por $y = f(x)$; $z = g(y)$, se tiene que $z = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

expresión conocida por *regla de la cadena*.

La regla de la cadena se puede aplicar al uso de más de dos funciones, por ejemplo, si $y = f(x)$, $z = g(y)$ y $u = h(z)$:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

Sea f: $R \to R$ definida por $y = f(x) = \text{sen}\, x$, y g: $[-1, 1] \to R$ definida por $g(y) = y^2$:

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = 2y \cdot \cos x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x$$

Por la regla de la cadena habría que interpretarlo así:

$$y = \text{sen}\, x\,,\quad z = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \cos x = 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x$$

FUNCION DIFERENCIABLE EN UN PUNTO.

La función f definida en un entorno de x_o se dice que es **diferenciable** en x_o, si existe una función $\epsilon: h \mapsto \epsilon(h)$ tal que $\lim_{h \to o} \epsilon(h) = 0$, y un número real A, independiente de h, que verifican la igualdad:

$$\boxed{f(x_o + h) - f(x_o) = A \cdot h + \epsilon(h) \cdot h} \qquad (1)$$

Veamos si la función f: $R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es diferenciable en $x_o = 5$.

$$f(5+h) - f(5) = [(5+h)^3 - 3(5+h) + 2] - (5^3 - 3{\cdot}5 + 2) = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot h + 3{\cdot}5 \cdot h^2 + h^3 - 15 - 3h + 2 - 112 =$$

$$= 72 \cdot h + (h^2 + 15\,h) \cdot h$$

identificando este resultado con (1) resulta: $A = 72$, $\epsilon(h) = h^2 + 15\,h$, siendo $\lim_{h \to o} \epsilon(h) = \lim_{h \to o} (h^2 + 15\,h) = 0$.

La función es diferenciable en $x_o = 5$.

La función f es diferenciable en x_o si y solo si f es derivable en x_o, verificándose que $A = f'(x_o)$.

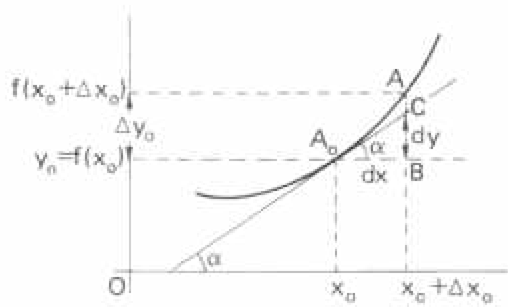
La aplicación lineal definida por: $h \mapsto f'(x_o) \cdot h$ se llama **diferencial de la función f en** x_o. Se simboliza por:

$$\boxed{df_{x_o} = f'(x_o) \cdot dx}$$

o bien, si la función f está definida por $y = f(x)$: $dy = f'(x) \cdot dx$.

Si la diferencial primera, $dy = f'(x) \cdot dx$, es diferenciable, se obtiene la diferencial segunda: $d^2 y = f''(x) \cdot (dx)^2 = f''(x) \cdot dx^2$, y así sucesivamente.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.



Sea (C) la curva de la función f respecto de un sistema de referencia ortonormal.

Sea la recta A_oC la tangente a la curva en el punto de abscisa x_o. En el triángulo A_oBC:

$$A_oB = \Delta x_o = dx\;;\quad \text{tg}\,\alpha = f'(x_o) = \frac{BC}{A_oB} = \frac{BC}{dx} \Rightarrow$$

$$BC = f'(x_o) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad BC = dy$$

La diferencial de la función es igual al incremento (positivo o negativo) de la ordenada de la tangente a la curva en el punto de abscisa x_o, al pasar del punto de abscisa x_o al punto de abscisa $x_o + \Delta x_o$. En la figura igual al segmento BC.

El incremento de la función, Δy, es igual a la diferencia de las ordenadas de los puntos de abscisas x_o y $x_o + \Delta x_o$; $\Delta y = f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)$. En la figura, igual al segmento BA.

Cuando Δx es pequeño se puede considerar que $\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx$.

Sea calcular el valor aproximado de $\sqrt{65}$.

Considerando la función definida por $y = \sqrt{x}$:

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

haciendo $x = 64$ y $dx = \Delta x = 1$: $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} \approx \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}}\cdot 1 = 8 + \frac{1}{2\cdot 8} = 8{,}06$

Se tiene una esfera de 0,5 metros de radio y se le quiere dar un baño de oro de 0,1 milímetro de espesor. ¿Qué volumen de oro se necesita?

Considerando la fórmula del volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{4}{3}\pi 3R^2 = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta V \approx 4\pi R^2 dx$$

haciendo $R = 500$ milímetros y $dx = 0{,}1$ milímetros:

$$\Delta V \approx 4\pi 500^2 \cdot 0{,}1 = 314160 \text{ mm}^3$$

DERIVADA DE LA FUNCION RECIPROCA.

Sea f una función continua estrictamente creciente o decreciente en el intervalo I, y sea f^{-1} la función recíproca de f. Si f es derivable en el punto a de I, y $f'(a) \neq 0$, la función f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$, y se verifica:

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}}$$

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5$ que es estrictamente creciente en R ya que $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0$ para todo x real por tener sus raices imaginarias y ser positivo el coeficiente de x^2. Para hallar $(f^{-1})'(5)$ tendremos que hallar el valor de x tal que $f(x) = 5$:

$x^3 - x^2 + 2x + 5 = 5 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$, única solución real, o sea que $f^{-1}(5) = 0$.

Aplicando la fórmula: $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'[f^{-1}(5)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

Si la función f es derivable en el intervalo I y se verifica que $f'(y) \neq 0$ para todo $y \in I$, la función recíproca f^{-1} es derivable en $f(I)$, y se verifica:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}$$

Utilizando la notación diferencial, esta propiedad se escribe así:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

La función definida por $y = \text{arc sen } x$, para $x \in]-1, 1[$ equivale a la función $x = \text{sen } y$, para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

y como para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos y > 0$, de $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$: $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La función definida por $y = \operatorname{arc\,tg} x$, para $x \in]-\infty, +\infty[$ equivale a la función $x = \operatorname{tg} y$, para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

FORMULA DE LEIBNIZ. Si las funciones f y g admiten derivada n–sima, se tiene:

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n} = f^{(n}\cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1}\cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2}\cdot g'' + \cdots + \binom{n}{n-1} f'\cdot g^{(n-1} + f\cdot g^{(n}}$$

Sea la función $x \mapsto e^{2x}\cdot x^2$. Haciendo $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x^2$:

$f'(x) = e^{2x}\cdot 2$; $f''(x) = e^{2x}\cdot 2^2, \dots, f^{(n}(x) = e^{2x}\cdot 2^n$; $g'(x) = 2x$; $g''(x) = 2$; $g'''(x) = \cdots = g^{(n}(x) = 0$

de donde: $(e^{2x}\cdot x^2)^{(n} = (e^{2x}\cdot 2^n)\,x^2 + \binom{n}{1}(e^{2x}\cdot 2^{n-1})\,2x + \binom{n}{2}(e^{2x}\cdot 2^{n-2})\cdot 2 = e^{2x}\left(2^n x^2 + 2^n nx + \frac{n(n-1)}{2}\,2^{n-1}\right)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES

FUNCION	DERIVADA	EJEMPLOS	
$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n\cdot[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$	$f(x) = (ax+b)^n$	$f'(x) = n(ax+b)^{n-1}\cdot a$
		$f(x) = \sqrt[n]{(ax+b)^m} = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$f'(x) = \frac{m}{n}(ax+b)^{\frac{m}{n}-1}\cdot a$
		$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$f'(x) = \frac{1}{2}(ax+b)^{\frac{1}{2}-1}\cdot a = \frac{1}{2}(ax+b)^{-\frac{1}{2}}\cdot a = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$f(x) = \log g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$	$f(x) = \log(ax+b)$	$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
		$f(x) = \log(ax+b)^n = n\cdot\log(ax+b)$	$f'(x) = n\cdot\frac{a}{ax+b}$
$f(x) = \log_a g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{\log a}\cdot g'(x)$	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log a}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}\cdot g'(x)$	$f(x) = e^{ax+b}$	$f'(x) = e^{ax+b}\cdot a$
		$f(x) = e^{\sqrt{x}}$	$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)} (\log a) \cdot g'(x)$	$f(x) = a^{bx+c}$	$f'(x) = a^{bx+c} (\log a) \cdot b$
$f(x) = \text{sen } g(x)$	$f'(x) = \cos g(x) \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{sen } (ax+b)$ $f(x) = \text{sen} \sqrt{x}$	$f'(x) = \cos (ax+b) \cdot a$ $f'(x) = \cos \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -\text{ sen } g(x) \cdot g'(x)$	$f(x) = \cos (ax+b)$	$f'(x) = -\text{ sen } (ax+b) \cdot a$
$f(x) = \text{tg } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= [1 + \text{tg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{tg } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 (ax+b)} \cdot a$ $= [1 + \text{tg}^2 (ax+b)] \cdot a$
$f(x) = \text{ctg } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\text{sen}^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= -[1 + \text{ctg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{ctg } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\text{sen}^2 (ax+b)} \cdot a =$ $= -[1 + \text{ctg}^2 (ax+b)] \cdot a$
$f(x) = \text{arc sen } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{arc sen } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} \cdot a$
$f(x) = \text{arc cos } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{arc cos } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} \cdot a$
$f(x) = \text{arc tg } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{arc tg } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+(ax+b)^2} \cdot a$
$f(x) = \text{arc ctg } g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)$	$f(x) = \text{arc ctg } (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+(ax+b)^2} \cdot a$

PROBLEMAS

10.1 A partir de la definición de derivada, calcular la de la función $f(x) = 3x$ en el punto $x = 1$.

(Univ. de Barcelona)

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h) - 3 \cdot 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \boxed{3}$$

10.2 Encontrar, utilizando sólo la definición de derivada, la derivada de

$$f(x) = \sqrt{x-5}$$

en $x = 9$.

(Univ. de Murcia, 1991)

$$f'(9) = \lim_{h \to 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(9+h)-5} - \sqrt{9-5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

10.3 Calcular la derivada, a la izquierda y a la derecha del origen, de

$$f(x) = \sqrt{x^2(1+x)}$$

(Univ. de Cantabria)

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{h^2(1+h)} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h\sqrt{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{1+h} = 1$$

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{(-h)^2(1-h)}}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{h^2(1-h)}}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h\sqrt{1-h}}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-h}}{-1} = -1$$

10.4 **Se considera la función f, definida en R, por:**

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \text{si } x \neq 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la citada función en x = 0.

(Univ. Valladolid, 1991)

Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{0 + h}{1 + e^{\frac{1}{0+h}}} = \left(\frac{0}{1 + e^{+\infty}} \right) = 0$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 - h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{0 - h}{1 + e^{\frac{1}{0-h}}} = \left(\frac{0}{1 + e^{-\infty}} = \frac{0}{1 + \frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{0}{1+0} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 - h) = f(0) \Rightarrow \text{la función es continua en } x = 0$$

Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{0 + h}{1 + e^{\frac{1}{0+h}}} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = \left(\frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{1 + \infty} \right) = 0$$

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 - h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{0 - h}{1 + e^{\frac{1}{0-h}}} - 0}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{-h}}} = \left(\frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{+\infty}}} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{1 + 0} \right) = 1$$

$f'(0)^+ \neq f'(0)^- \Rightarrow$ la función no es derivable en $x = 0$.

10.5 **Sea k un número real y f una función real definida sobre R mediante**

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + kx, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Calcular la derivada en el punto x = 0.
b) Calcular la función derivada.
c) ¿Es continua la función f'(x) en x = 0?

(Univ. de Cádiz)

a) Aplicando la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} + kh - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h} + k\right) = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) + k$$

como $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right| \leqslant 1$, y $h \to 0$, el producto de una función acotada por otra que tiende a 0 es 0, es decir: $\lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) = 0$, de donde: $\boxed{f'(0) = k}$

b) Para $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2} + k = 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + k$

de donde:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c) $\lim_{h\to 0} f'(0+h) = \lim_{h\to 0}\left(2h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h} + k\right) = \lim_{h\to 0}\left(2h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h} + k =$

$$= 0 - \lim \cos\frac{1}{h} + k$$

Si consideramos, por ejemplo, que h toma los valores de la sucesión $\frac{1}{2n\pi + a}$, siendo n un número natural y $0 < a < 2\pi$:

$$\lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{h} = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi + a) = \cos a$$

y según sea el valor de a, $\cos a$ oscilará entre -1 y 1, lo que nos dice que no existe el $\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$, y por tanto tampoco existe el $\lim_{h\to 0} f'(0+h)$. La función f' no es continua en $x = 0$.

10.6 **Considerar la función**

$$f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x < 7 \\ ax+4 & \text{si } 7 \leqslant x < 10 \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de a para que f sea continua en $x = 7$.
b) La gráfica de f.
c) Dominio y recorrido de f.
d) La derivada de f en $x = 7$ y $x = 9$.

(Univ. de Sevilla)

a) Considerando que

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{" " " " " " " } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$3 - x = 0\ ;\ x = 3 \Rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -(x-3) = -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

de donde:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 7 \\ ax+4 & \text{si} \quad 7 \leqslant x < 10 \end{cases}$$

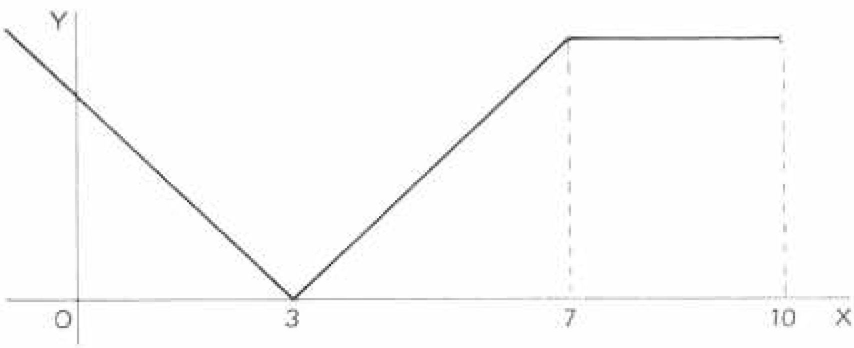
La función será continua en $x = 7$ si $\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(7-h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(7+h) = f(7)$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(7-h) &= \lim_{h \to o} [(7-h)-3] = 4 \\ \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(7+h) &= \lim_{h \to o} [a(7+h)+4] = 7a+4 \end{aligned}\right| \quad 7a+4 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Con este resultado se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 7 \\ 4 & \text{si} \quad 7 \leqslant x < 10 \end{cases}$$

b) La gráfica de la función es:



c) La función está definida para $-\infty < x < 10$, el dominio de f es $]-\infty, 10[$.

De la gráfica se deduce que los valores de $f(x)$ varían de 0 a $+\infty$, o sea que el recorrido de f $[0, +\infty[$.

d)

$$\left.\begin{aligned} f'(7)^- &= \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(7-h)-f(7)}{-h} = \lim_{h \to o} \frac{[(7-h)-3]-4}{-h} = \lim_{h \to o} \frac{-h}{-h} = 1 \\ f'(7)^+ &= \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{4-4}{h} = \lim_{h \to o} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

la función no es derivable en $x = 7$.

Como en un entorno de 9, suficientemente pequeño, la función es constante: $f'(9) = 0$.

10.7 **Calcular $f'(x)$ siendo** $\quad f(x) = \dfrac{x^3}{\text{sen}^2 x}$

(Univ. de Navarra)

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \text{sen}^2 x - x^3 \cdot 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x}{\text{sen}^4 x} = \frac{x^2(3\,\text{sen}^2 x - 2x \cos x)}{\text{sen}^3 x}$$

10.8 **Calcular las derivadas de las funciones siguientes:**

$$f(x) = \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad g(x) = (1+x^4)^{\frac{1}{2}}$$

(Univ. de Barcelona)

$$f(x) = \left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$$

$$g(x) = (1+x^4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

10.9 **Derivar y simplificar** $f(x) = \text{arc tg}\,\frac{1+x}{1-x} - \text{arc tg}\,x$

(Univ. de Madrid)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{(1+x^2-2x)+(1+x^2+2x)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

10.10 **Derivar y simplificar** $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\text{arc sen}\,x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

(Univ. País Vasco)

$$f'(x) = \frac{2x}{2}\,\text{arc sen}\,x + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\,\text{arc sen}\,x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-x^2)-\frac{x^2}{4}\right) = x\,\text{arc sen}\,x$$

10.11 **Calcular la derivada de** $f(x) = (\text{arc sen}\,x)^{\cos^2 x}$

(Univ. de Madrid)

Tomando logaritmos (neperianos): $\log f(x) = \cos^2 x\cdot\log(\text{arc sen}\,x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\cos x\,(-\text{sen}\,x)\cdot\log(\text{arc sen}\,x) + \cos^2 x\cdot\frac{1}{\text{arc sen}\,x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (\text{arc sen}\,x)^{\cos^2 x}\left(-\text{sen}\,2x\cdot\log(\text{arc sen}\,x)\right) + \frac{\cos^2 x}{\text{arc sen}\,x\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

10.12 a) Expresar que la variable y es directamente proporcional a la variable u, e inversamente proporcional al cuadrado de la variable x.

b) Si $u = \text{sen}^2 x$, calcular la derivada de y respecto a x en la fórmula obtenida en a).

(Univ. de Alicante)

a) $y = k \cdot \dfrac{u}{x^2}$ (k es un número real distinto de 0)

b) $y = k \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2} = k\left(\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)^2 \Rightarrow y' = k \cdot 2 \dfrac{\text{sen } x}{x} \cdot \dfrac{(\cos x)\cdot x - (\text{sen } x)\cdot 1}{x^2} =$

$$= 2k \frac{\text{sen } x\,(x \cos x - \text{sen } x)}{x^3}$$

10.13 Dada la función $f(x) = \text{arc tg } x + \text{arc tg } \dfrac{1}{x}$

comprobar que para cada $x \neq 0$ es $f'(x) = 0$. Calcular $f(1)$, $f(-1)$ y dibujar la gráfica.

(Univ. de Zaragoza)

La función no está definida en $x = 0$, y por tanto no existe la función derivada en $x = 0$.

Si $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2+1} = 0$

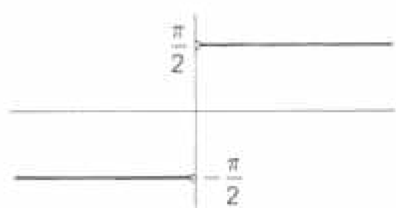
$f(1) = \text{arc tg } 1 + \text{arc tg } 1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$; $f(-1) = \text{arc tg } (-1) + \text{arc tg } (-1) = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$

Para dibujar la gráfica no hemos de caer en el error de afirmar que puesto que $f'(x) = 0$, la función es constante en todos sus puntos, ya que $f'(x) = 0$ si $x \neq 0$. En $x = 0$ no existe f'.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x < 0 \\ \text{no existe para} & x = 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x < +\infty \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} \text{constante para} & -\infty < x < 0 \\ \text{no está definida para} & x = 0 \\ \text{constante para} & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

y como $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ y $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, resulta

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{para } -\infty < x < 0 \\ \text{no existe para} & x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{para } 0 < x < +\infty \end{cases}$$



10.14 Dada la función f, definida por $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$, se pide:

1º) Determinar los valores de x para los que está definida.

2º) Hallar su derivada.

(Univ. de Madrid)

1º) $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ no existirá para los valores de x que anulen el denominador, o sea para

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (véase la representación gráfica de $y = \operatorname{sen} x$).

$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ no existirá para los valores de x que hagan $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} < 0$ o anulen el denominador. Como para todo valor real de x: $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ es igual o mayor que 0, excepto para los valores de x que anulan el denominador. La raíz estudiada no exixte para $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

$\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ no existirá para los valores de x que hagan $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \leqslant 0$ o anulen el denominador. Para $x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x = -1$, $1 + \operatorname{sen} x = 0$, $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = 0$, la función no está definida.

De todo lo anterior se deduce que la función f no está definida para $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2º) $$f'(x) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x) - (-\cos x)(1+\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

10.15 Calcular $\Delta y - dy$ para la función $y = 2x^2 - \frac{x}{2}$ en $x = 2$, para $\Delta x = 0,3$.

(Univ. de León)

En $x = 2$, para $\Delta x = 0,3$, considerando que $y' = 4x - \frac{1}{2}$:

$$\Delta y = f(2+0,3) - f(2) = \left(2(2+0,3)^2 - \frac{2+0,3}{2}\right) - \left(2\cdot 2^2 - \frac{2}{2}\right) = 2(2,3)^2 - \frac{2,3}{2} - 7 =$$

$$= 10,58 - 1,15 - 7 = 2,43.$$

$$dy = f'(2)\cdot 0,3 = \left(4\cdot 2 - \frac{1}{2}\right)\cdot 0,3 = 7,5\cdot 0,3 = 2,25$$

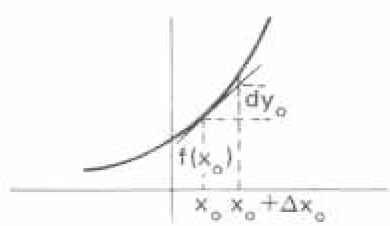
de donde $$\Delta y - dy = 2,43 - 2,25 = \boxed{0,18}$$

10.16 Utilizar la diferencial para obtener razonadamente un valor aproximado de $e^{0,007}$

(Univ. de Valencia)

Sea f una función derivable en el punto x_o. Si se toma como valor aproximado de la función en un entorno de x_o el de la ordenada de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_o, f(x_o))$, este valor aproximado es $f(x_o) + dy_o$, siendo $dy_o = f'(x_o)dx_o$, o sea se considera que

$$f(x_o + \Delta x_o) = f(x_o) + f'(x_o)dx_o$$



Aplicación: Sea f la función definida por $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $x_0 = 0$ y $\Delta x_0 = dx_0 = 0{,}007$:

$$f(0{,}007) = e^{0{,}007} = f(0) + f'(0)\,dx = e^0 + e^0 \cdot 0{,}007 = 1 + 1 \cdot 0{,}007 = \boxed{1{,}007}$$

10.17 Si es posible, poner un ejemplo de una función que en $x = a$ sea:

a) Continua y derivable.

b) Derivable y no continua.

c) Continua y no derivable.

(Univ. de León)

a) Las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo punto de **R**, luego la función **f: R → R**, definida por

$$f(x) = 6x^3 - 4x^2 + x - 5$$

es continua y derivable en $x = a$, cualquiera que sea $a \in \mathbf{R}$.

b) Si una función no es continua en un punto, no es derivable.

c) La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < a \\ x & \text{"} \quad x \geq a \end{cases}$$

es continua y no derivable en $x = a$.

10.18 Se bombea gas a un globlo esférico a razón de $6 m^3$/min. Si la presión se mantiene constante, ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide 120 cm.?

(Se recuerda que el volumen de la esfera de radio R es de $\frac{4}{3}\pi R^3$)

(Univ. de Madrid, 1991)

$6\ m^3/\text{min} = 6 \cdot (100)^3\ cm^3/\text{min.} = 6000000\ cm^3/\text{min.}$

Al cabo de t minutos, el volumen del globo será: $\quad \frac{4}{3}\pi R^3 = 6000000 \cdot t \quad cm^3$

Derivando respecto del tiempo (considerando que R es función de t):

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \frac{dR}{dt} = 6000000 \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{6000000}{4\pi R^2} \text{ cm/min.}$$

Cuando R = 60 cm: $\quad \frac{dR}{dt} = \frac{6000000}{4\pi(60)^2} = 132{,}63$ cm/min.

10.19 Un observador se encuentra a 2000 metros de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando éste despega verticalmente mide la variación del ángulo $\phi(t)$ que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que $\phi'(t) = 1/20$ radianes por segundo cuando $\phi = \pi/3$, se pide:

1. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $\phi = \pi/3$ radianes?

2. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando $\phi = \pi/3$ radianes?

(Univ. de Madrid, 1991)

1. En el triángulo OAB: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{h}{2000} \Rightarrow$

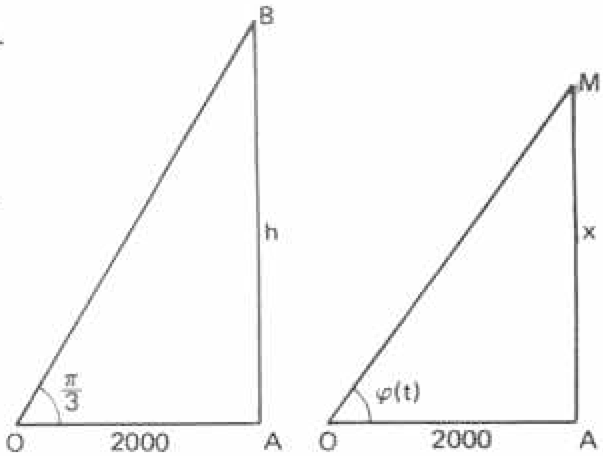
$$h = 2000 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 2000\sqrt{3} = 3464'1 \text{ m}$$

2. En el triángulo OAM, sea x la altura alcanzada al cabo del tiempo t:

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{x}{2000} \Rightarrow x = 2000 \operatorname{tg}\varphi(t)$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = 2000 \frac{1}{\cos^2\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$$



como $\varphi'(t) = \frac{1}{20}$ radianes por segundo cuando $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radianes, la velocidad del cohete cuando $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radianes es:

$$\frac{dx}{dt} = 2000 \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{20} = 2000 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{20} = 400 \text{ m/s.}$$

10.20 Probar que un número real a es raíz doble de una función polinómica f(x) si y sólo si a es raíz común de f(x) y f'(x).

Aplicarlo para resolver la ecuación

$$18x^3 - 33x^2 + 20x - 4 = 0$$

sabiendo que tiene una raíz doble.

(Univ. de Málaga)

– Si a es raíz doble de la fracción polinómica f(x) se tendrá:

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = 2(x-a)\cdot g(x) + (x-a)^2 \cdot g'(x) =$$
$$= (x-a)[2g(x) + (x-a)\cdot g'(x)] \Rightarrow a \text{ es raíz de } f'(x) = 0.$$

– Si f(x) y f'(x) tienen la raíz común a, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\cdot h(x) \\ f'(x) &= (x-a)\cdot j(x) \end{aligned}\right|$$

siendo h(x) y j(x) polinomios.

Derivando la primera de estas igualdades: $f'(x) = 1\cdot h(x) + (x-a)\cdot h'(x)$, y como por la segunda igualdad: $f'(x) = (x-a)\cdot j(x)$, resulta:

$$(x-a)\cdot j(x) = h(x) + (x-a)\cdot h'(x) \Rightarrow h(x) = (x-a)\cdot j(x) - (x-a)\cdot h'(x) = (x-a)[j(x) - h'(x)]$$

sustituyendo este valor en la primera igualdad:

$$f(x) = (x-a)\cdot(x-a)[j(x) - h'(x)] = (x-a)^2[j(x) - h'(x)] \Rightarrow f(x) = 0 \text{ tiene la raíz doble}$$

$x = a$.

Para resolver la ecuación dada sabiendo que tiene una raiz doble, se hallan la raices de su derivada:

$$54x^2 - 66x + 20 = 0 \;;\; 27x^2 - 33x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 27 \cdot 10}}{54} = \frac{33 \pm 3}{54} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{36}{54} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{30}{54} = \dfrac{5}{9} \end{array} \right.$$

y se comprueba, por Rufini, cual de estas raices es raiz doble de la ecuación primitiva:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 18 & -33 & 20 & -4 \\ \frac{2}{3} & & 12 & -14 & 4 \\ \hline & 18 & -21 & 6 & \boxed{0} \\ \frac{2}{3} & & 12 & -6 & \\ \hline & 18 & -9 & \boxed{0} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{2}{3} \text{ es raiz doble} \\ 18x - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \text{ es la tercera raiz} \end{array} \right.$$

10.21 **Calcular la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

(Univ. de Barcelona)

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{2x} \\ f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \\ f''(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot e^{2x} \end{array} \right| \quad \text{Por la forma de estas expresiones parece ser que} \quad f^{(n}(x) = 2^n \cdot 2^{2x} \qquad (1)$$

La fórmula (1) se verifica para $n = 1$ y $n = 2$, suponiendo que se verifica para $n = h$:

$f^{(h}(x) = 2^h \cdot e^{2x}$, al derivar esta expresión se tiene que $f^{(h+1}(x) = 2^{h+1} \cdot e^{2x}$, que es la fórmula (1) para $n = h + 1$.

Está demostrado por el método de inducción que la fórmula (1) es verdadera.

10.22 **Demostrar que todas las derivadas de orden par de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por**

$$f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$$

son nulas en $x = 0$.

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Emplearemos las fórmulas: $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$ y $\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(2 \text{ sen } x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x) \cdot 2 = \cos 2x = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2 \text{ sen}\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2 \cos\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2^2 \text{ sen}\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x) = 2^2 \cos\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 = 2^3 \text{ sen}\left(2x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

de estos resultados parece ser que $\quad f^{(n}(x) = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$

fórmula que se cumple para $n = 1, 2, 3, 4$, derivando (1):

$$f^{(n+1}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^n \operatorname{sen}\left(2x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

que es la fórmula (1) sustituyendo n por $n+1$.

Está demostrado que la derivada de orden n está dada por la fórmula (1).

Para todo n par, $n = 2h$:

$$f^{(2h}(x) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}\left(2x + 2h\frac{\pi}{2}\right) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}(2x + h\pi) \Rightarrow$$

$$f^{(2h}(0) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}(h\pi) = 2^{2h-1}\cdot 0 = 0$$

10.23 Sea la función $f\colon\ R - \{0\} \to R$ derivable tal que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \neq 0$. Demostrar:

1º) La función f es derivable dos veces.

2º) Existen números reales a, b, c tales que

$$ax^2\cdot f''(x) + bx\cdot f'(x) + c\cdot f(x) = 0\ , \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

(Univ. de Oviedo)

1º) Considerando la derivada de las funciones compuestas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \quad f''(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} \\ \text{Como } f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0: \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = f(x) \end{array}\right| \Rightarrow f''(x) = f(x)\cdot\frac{-1}{x^2} \quad \forall x \neq 0$$

lo que nos dice que f es derivable dos veces.

2º) De $f''(x) = \frac{-1}{x^2}\cdot f(x)$ se deduce que $\forall x \neq 0$: $x^2\cdot f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow$

$$1\cdot x^2\cdot f''(x) + 0\cdot f'(x) + 1\cdot f(x) = 0$$

de donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

10.24 Hallar un punto del intervalo $[0, 1]$ donde la tangente a la curva

$$y = 1 + x - x^2$$

sea paralela al eje de abscisas.

(Univ. de Cantabria)

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (a, b) es: $y - b = f'(a)\cdot(x - a)$.

Si esta tangente es paralela al eje de abscisas se verificará que $f'(a) = 0$:

$$y' = 1 - 2x \Rightarrow f'(a) = 1 - 2a = 0\ ;\ a = \frac{1}{2},\ \text{siendo}\ \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

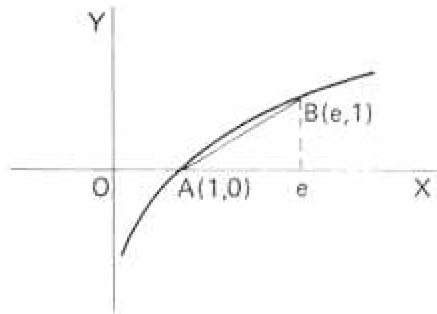
Para $a = \frac{1}{2}$: $y = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ el punto pedido es el $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

10.25 **En qué punto de la curva** $y = \log x$ **la tangente es paralela a la cuerda que une los punto (1,0) y (e,1)?**

(Univ. de Oviedo)

El coeficiente angular de la cuerda AB es:

$$\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$



Si $M(a, \log a)$ es el punto pedido:

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow a = e-1$$

el punto pedido es $M(e-1, \log(e-1))$.

10.26 **Obtener los puntos de la gráfica de:**

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x + 4$$

en los que la recta tangente es paralela a:

$$y - 3x - 2 = 0$$

(Univ. Castilla — La Mancha, 1991)

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 3$$

Si el punto $M(a, b)$ es el pedido, se verificará que las rectas:

$$y - b = f'(a)(x-a) \;; \quad y = 3x + 2$$

son paralelas, de donde:

$$4a^3 - 21a^2 + 26a + 3 = 3 \Rightarrow 4a^3 - 21a^2 + 26a = 0 \;; \; (4a^2 - 21a + 26)a = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ 4a^2 - 21a + 26 = 0 \;; \; a = \dfrac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4\cdot 4\cdot 26}}{2\cdot 4} = \dfrac{21 \pm 5}{8} = \begin{cases} \dfrac{26}{8} = \dfrac{13}{4} \\ = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$f(0) = 4$;

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 13 & 3 & 4 \\ 2 & & 2 & -10 & 6 & 18 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & 9 & \underline{22} \end{array} \Rightarrow f(2) = 22$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 13 & 3 & 4 \\ \frac{13}{4} & & \frac{13}{4} & -\frac{195}{16} & \frac{169}{64} & \frac{4693}{256} \\ \hline & 1 & -\frac{15}{4} & \frac{13}{16} & \frac{361}{64} & \frac{5717}{256} \end{array} \Rightarrow f\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{5717}{256}$$

Los puntos $(0, 4)$, $(2, 22)$ y $\left(\frac{13}{4}, \frac{5717}{256}\right)$ son los pedidos.

10.27 Hallar los puntos en los que la tangente a la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$$

es: a) paralela al eje OX.

b) paralela a la recta $y = 5x + 3$.

c) perpendicular a la recta $y = \frac{x}{3} + 1$.

(Univ. de Alicante)

Sea $M(a, b)$ un punto de la curva dada. La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (a, b) de la curva es:

$$y - b = f'(a) \cdot (x - a).$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(a) = a^2 - 2a - 3 \Rightarrow$$

$$y - b = (a^2 - 2a - 3)(x - a) \qquad (1)$$

es la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto $M(a, b)$. Verificándose, por estar M sobre la curva, que

$$b = \frac{a^3}{3} - a^2 - 3a + 1 \qquad (2)$$

a) Si la recta de ecuación (1) es paralela al eje OX, su coeficiente angular es 0:

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

de (2) resulta que si $a = 3$, $b = -8$; y si $a = -1$, $b = \frac{8}{3}$. Llevando estos dos pares de valores a (1) obtenemos dos tangentes a la curva paralelas al eje OX:

$$\boxed{y + 8 = 0} \quad ; \quad \boxed{y - \frac{8}{3} = 0}$$

b) Si la recta de ecuación (1) es paralela a la recta $y = 5x + 3$, el coeficiente de ambas rectas es el mismo:

$$a^2 - 2a - 3 = 5 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

y como el punto $M(a,b)$ está sobre la curva, se verifica la relación (2):

$$\text{para } a = 4;\ b = \frac{64}{3} - 16 - 12 + 1 = -\frac{17}{3};\ \text{para } a = -2:\ b = \frac{-8}{3} - 4 + 6 + 1 = \frac{1}{3}$$

de donde resultan las ecuaciones pedidas:

$$y + \frac{17}{5} = 5(x - 4), \quad \boxed{y = 5x - \frac{117}{5}} \quad ; \quad y - \frac{1}{3} = 5(x + 2), \quad \boxed{y = 5x + \frac{31}{3}}$$

c) Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus coeficientes angulares es igual a -1:

$$(a^2 - 2a - 3) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = -3;\ a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 2$$

obteniendo en (2) los valores correspondientes de b:

$$\text{para } a = 0: \; b = 1 \; ; \quad \text{para } a = 2: \; b = \frac{8}{3} - 4 - 6 + 1 = -\frac{19}{3}$$

y las rectas pedidas serán:

$$y - 1 = -3(x - 0), \quad \boxed{y = -3x + 1} \quad ; \quad y + \frac{19}{3} = -3(x - 2), \quad \boxed{y = -3x - \frac{1}{3}}$$

10.28 **Hallar el punto de la curva $y = \log(1 + x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.**

(Univ. del País Vasco)

$$f(x) = \log(1 + x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$$

Recordando que dos rectas $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ son perpendiculares sí y solo sí

$$m' = \frac{-1}{m} \quad \text{ó} \quad mm' + 1 = 0,$$

si a es la abscisa de punto buscado:

$$f'(a) \cdot f'(1) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2a}{1 + a^2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2(1 + a^2) = 0 \; ; \; a^2 + 2a + 1 = 0 \; ; \; a = -1.$$

$$f(-1) = \log[1 + (-1)^2] = \log 2 \Rightarrow \text{el punto pedido es el } (-1, \log 2).$$

10.29 **Se da la curva $y = \frac{1}{x}$. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.**

(Univ. de Madrid)

Considerando que la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) de la misma es $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ se tiene:

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$ que particularizada para $x = 3$ vale $y' = \frac{-1}{9}$, de donde la ecuación de la tangente en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ es:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(x - 3) \quad \begin{cases} \text{para } x = 0: & y - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(0 - 3) \; ; \quad y = \frac{2}{3} \\ \quad '' \quad y = 0: & 0 - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(x - 3) \; ; \quad 3 = x - 3 \; ; \; x = 6 \end{cases}$$

los puntos de corte de la tangente con los ejes son $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $(6, 0)$. El punto medio del segmento que tiene por extremos estos puntos es el que tiene por coordenadas la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$\left(\frac{0 + 6}{2}, \frac{\frac{2}{3} + 0}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

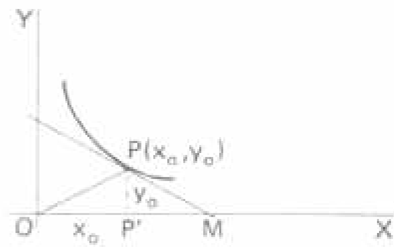
10.30 **Si P es un punto cualquiera de la gráfica $y = \frac{1}{x}$, probar que el triángulo formado por la recta OP, la tangente a esa gráfica en el punto P y el eje $y = 0$ es isósceles. (O es el origen de coordenadas)**

(Univ. de Madrid)

La ecuación de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(x_o, y_o)$ de la gráfica es:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow$$



la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ en el punto $P(x_o, y_o)$ es:

$$y - y_o = \frac{-1}{x_o^2}(x - x_o)$$

haciendo $y = 0$ obtendremos la abscisa del punto M de corte de la tangente con el eje OX:

$$0 - y_o = \frac{-1}{x_o^2}(x - x_o) \Rightarrow y_o x_o^2 = x - x_o \qquad (1)$$

por estar el punto $P(x_o, y_o)$ sobre la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ satisface su ecuación, o sea que $y_o = \frac{1}{x_o}$, llevando este valor a (1):

$$\frac{1}{x_o} x_o^2 = x - x_o \Rightarrow x_o = x - x_o \Rightarrow x = 2x_o \Rightarrow$$ las coordenadas del punto M son $(2x_o, 0)$.

La mediatriz del segmento OM es $x = x_o$, y como las coordenadas del punto P satisfacen esta ecuación, el punto P está sobre esta mediatriz, lo que nos dice que el triángulo OPM es isósceles.

10.31 **Consideremos la parábola de ecuación $f(x) = x^2$. Razona si, cualesquiera que sean los números reales a y b, con $a < b$, siempre existe una recta paralela a la recta que pasa por los puntos (a, a^2), y (b, b^2), y que ademá sea tangente a la gráfica de la parábola en un punto (c, c^2), con $c \in\,]a, b[$. En caso afirmativo, escribe su ecuación.**

(Univ. de Valencia, 1991)

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(a, a^2)$ y $B(b, b^2)$ es:

$$\frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2 \; ; \; y = (b + a)x - ab \qquad (1)$$

$f'(x) = 2x \Rightarrow$ la ecuación de la tangente a la parábola en el punto $C(c, c^2)$ es:

$$y - c^2 = 2c(x - c) \; ; \quad y = 2cx - c^2 \qquad (2)$$

Las rectas (1) y (2) serán paralelas si $2c = a + b$; $\boxed{c = \frac{a + b}{2}}$, llevando este valor a (2) resulta:

$$y = 2\,\frac{a + b}{2}\,x - \frac{(a + b)^2}{4} \; ; \quad \boxed{y = (a + b)\,x - \frac{(a + b)^2}{4}}$$

10.32 **Demostrar que las curvas**

$$e^x \cos y = e^a \cos b \qquad y \qquad e^x \operatorname{sen} y = e^a \operatorname{sen} b$$

se cortan ortogonalmente.

(Univ. de Sevilla)

Hallemos el punto de corte de ambas curvas. Dividiendo miembro a miembro sus ecuaciones:

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} b \Rightarrow y = b$$

sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$e^x \cos b = e^a \cos b \Rightarrow x = a$$

Las curvas se cortan en el punto (a, b).

El ángulo α bajo el que se cortan las curvas $y = f(x)$, e $y = g(x)$ en el punto (a, b) está determinado por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f'(a) - g'(a)}{1 + f'(a) \cdot g'(a)}$$

Derivando respecto de x las funciones implícitas de las curvas del enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} e^x \cdot \cos y + e^x(-\operatorname{sen} y) \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \Rightarrow f'(a) = \dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b} \\[2ex] e^x \cdot \operatorname{sen} y + e^x \cdot \cos y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \Rightarrow g'(a) = -\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b} - \left(-\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}\right)}{1 + \dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b}\left(-\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}\right)} = \frac{\operatorname{ctg} b + \operatorname{tg} b}{1 - 1} = \frac{\operatorname{ctg} b + \operatorname{tg} b}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

las curvas se cortan ortogonalmente.

10.33 **Calcular el ángulo que forman las curvas de ecuaciones:**

$$xy = 1 \qquad y \qquad x^2 - y^2 = 1$$

(Univ. de Madrid)

Sea (a, b) un punto de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\[2ex] x^2 - y^2 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \\[2ex] 2x - 2yy' = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = -\dfrac{y}{x} \\[2ex] y' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(a) = -\dfrac{b}{a} \\[2ex] g'(a) = \dfrac{a}{b} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}{1 + -\dfrac{b}{a}\,\dfrac{a}{b}} = \frac{-(b^2 + a^2)}{1 - 1} = \left(\frac{-(b^2 + a^2)}{0} = \infty\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}}$$

CAPITULO 11

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO MAXIMOS Y MINIMOS CONVEXIDAD

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION.

La función f definida en el intervalo I es **estrictamente creciente** en el punto $x_o \in I$, si existe un entorno simétrico de centro x_o de radio δ, tal que para todo h, $0 < h < \delta$, se verifica:

$$\boxed{f(x_o - h) < f(x_o) < f(x_o + h)}$$

y es **estrictamente decreciente** si

$$\boxed{f(x_o - h) > f(x_o) > f(x_o + h)}$$

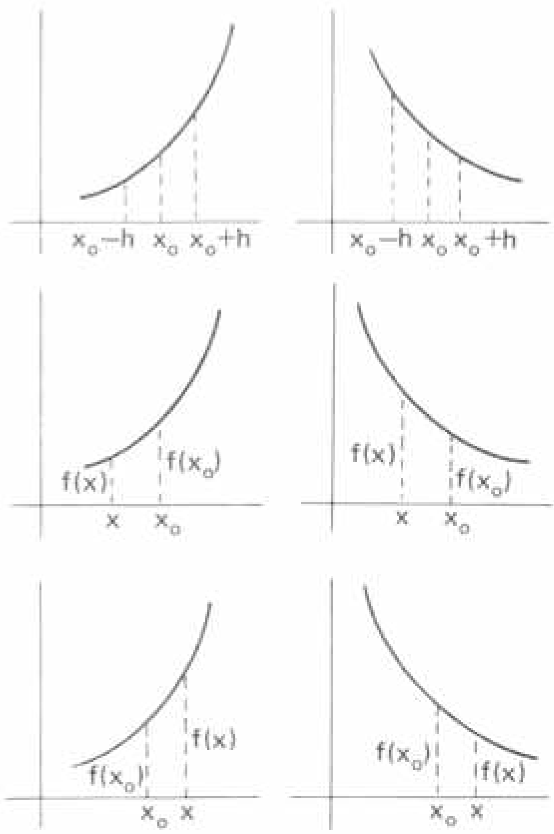
También se puede definir así: la función f es estrictamente creciente en x_o si existe un entorno E de x_o tal que para todo $x \in E$ se verifica:

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} > 0} \qquad (1)$$

y es estrictamente decreciente en x_o si

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} < 0} \qquad (2)$$

Si en las expresiones anteriores se sustituye el signo $<$ por $\leqslant$ y el $>$ por $\geqslant$, tendremos la definición de función creciente y decreciente en un punto.



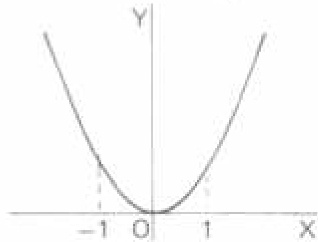
FUNCION CRECIENTE FUNCION DECRECIENTE

Si la función f es creciente en x_o, y existe $f'(x_o)$, se tendrá que $f'(x_o) \geqslant 0$, ya que de (1) se deduce que $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geqslant 0$.

Si la función f es decreciente en x_o y existe $f'(x_o)$, se tendrá que $f'(x_o) \leqslant 0$, ya que de (2) se deduce que $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leqslant 0$.

Si la función f es derivable en x_o y es $f'(x_o) > 0$ la función es estrictamente creciente en x_o, y si $f'(x_o) < 0$ es estrictamente decreciente en x_o. Conociendo solamente que $f'(x_o) = 0$ no podemos saber si la función es creciente o decreciente en x_o.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es derivable $\forall x \in R$ siendo $f'(x) = 2x$. En $x = -1$: $f'(-1) = -2 < 0$ es decreciente, en $x = 1$: $f'(1) = 2 > 0$ es creciente, y en $x = 0$: $f'(x) = 0$, no es creciente ni decreciente.



Si la función f es derivable sobre el intervalo I; se verifica:

— f creciente sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

— f decreciente sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$

— f constante sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$

— $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en I

— $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en I

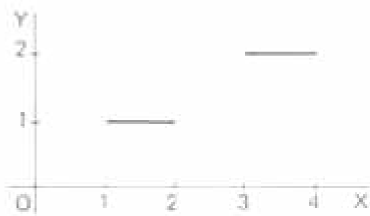
— $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es constante en I

Las propiedades anteriores sólo son válidas si la función f es derivable en el intervalo I. Si I no es un intervalo, no se pueden aplicar.

La función f definida en el conjunto $[1, 2] \cup [3, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 2 & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

es tal que $f'(x) = 0$ para todo x perteneciente a su campo de definición, y sin embargo, la función no es constante en dicho campo (este campo no es un intervalo).



Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f se obtienen las raices de $f'(x) = 0$ y los puntos donde no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia el signo de $f'(x)$.

Sea hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

$$f(x) = x - 3x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 1 - 2\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} \; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 8$$

para $x = 0$ se anula el denominador de $f'(x)$, lo que implica que no existe $f'(0)$.

Con estos datos podemos formar el siguiente cuadro, donde con ↗ simbolizamos que la función es creciente y con ↘ que es decreciente.

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	no existe	—	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

La función es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]8, +\infty[$ y decreciente en $]0, 8[$

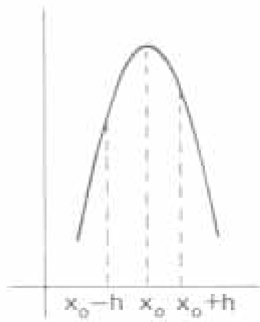
MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION.

La función f definida en el intervalo I tiene un **máximo** relativo en el punto $x_o \in I$, si existe un entorno simétrico de centro x_o y radio δ, tal que para h, $0 < h < \delta$, se verifica:

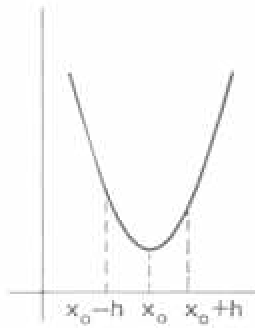
$$\boxed{f(x_o - h) < f(x_o) > f(x_o + h)}$$

tiene un **mínimo** relativo en x_o si:

$$\boxed{f(x_o - h) > f(x_o) < f(x_o + h)}$$



MAXIMO



MINIMO

También se puede definir así: La función f tiene en el punto x_o un máximo relativo si existe un entorno E de x_o tal que para todo x de E se verifica:

$$\boxed{f(x) < f(x_o)} \qquad (3)$$

y tiene en x_o un mínimo relativo si

$$\boxed{f(x) > f(x_o)} \qquad (4)$$

Si la función tiene en x_o un máximo o un mínimo, se dice que tiene un extremo en x_o.

Si la desigualdad (3) se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un máximo absoluto en I. Si (4) se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un mínimo absoluto.

Si la función f es derivable en x_o y tiene un máximo o un mínimo en x_o, se verifica que $f'(x_o) = 0$.

La condición $f'(x_o)$ es condición necesaria, pero no es suficiente para que haya extremo en x_o. Si $f'(x_o) = 0$, para ver si la función tiene en x_o un extremo hay que estudiar el signo de $f'(x)$ a derecha e izquierda de x_o: Sea h un infinitésimo.

$$f'(x_o) = 0 \quad \left| \begin{array}{lll} \left| \begin{array}{l} f'(x_o - h) > 0 \\ f'(x_o + h) < 0 \end{array} \right. & \Rightarrow & f \text{ tiene un máximo en } x_o \\ \left| \begin{array}{l} f'(x_o - h) < 0 \\ f'(x_o + h) > 0 \end{array} \right. & \Rightarrow & f \text{ tiene un mínimo en } x_o \\ f'(x_o - h) \text{ y } f'(x_o + h) \text{ tienen el mismo signo} & \Rightarrow & f \text{ no tiene extremo en } x_o \end{array} \right.$$

Para hallar los máximos y mínimos de la función $f: I \to \mathbf{R}$, se obtienen las raíces de $f'(x) = 0$ y los puntos donde no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles puntos, junto con los extremos del intervalo I, si éste es compacto (cerrado y acotado), donde la función puede tener máximos o mínimos.

Sea hallar los extremos de la función $f: [-8, 10] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

$$f(x) = x - 3x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3} - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} \; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$$

$f'(x)$ no existe para $x = 0$

Los posibles puntos donde hay extremos son 8, 0, -8 y 10. (-8 y 10 son los extremos del conjunto de definición).

x	-8		0		8		10
$f'(x)$		$+$	no existe	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-30	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$10 - 3\sqrt[3]{100} \approx -3{,}92$

La función tiene en $x = -8$ un mínimo absoluto igual a -30, en $x = 0$ un máximo absoluto igual a 0, en $= 8$ un mínimo relativo igual a -4 y en $x = 10$ un máximo relativo igual a $10 - 3\sqrt[3]{100}$.

FUNCIONES CONVEXAS.

La función real f definida en el intervalo I es **convexa** en I, si cualesquiera que sean los puntos $a \in I$ y $b \in I$, y el número real $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$\boxed{f[\lambda a + (1-\lambda) b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)}$$

La función $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en cualquier intervalo I de **R**.

En efecto: $\forall a \in I$ y $\forall b \in I$, y $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] = [\lambda a + (1-\lambda) b]^2 = \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab$$

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda a^2 + (1-\lambda) b^2$$

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] - \lambda f(a) - (1-\lambda) f(b) = \lambda a^2(\lambda-1) + (1-\lambda) b^2 (1-\lambda-1) + 2\lambda(1-\lambda)ab =$$

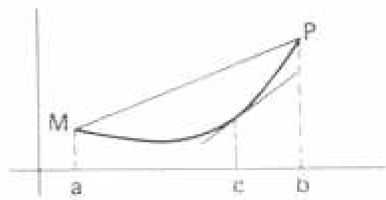
$$= -\lambda(1-\lambda)(a^2+b^2-2ab) = -\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ es convexa.}$$

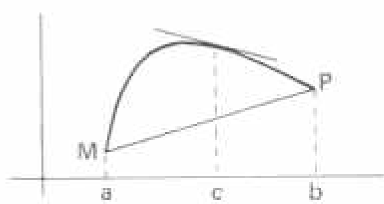
La función f es **cóncava** en el intervalo I si la función $-f$ es convexa en el intervalo I.

Geométricamente: Si (C) es la curva representativa de la función convexa f en el intervalo $I = [a,b]$, la cuerda de extremos $M[a, f(a)]$ y $P[b, f(b)]$ está por encima del arco de curva MP. Si la función es cóncava, la cuerda MP está por debajo del arco MP.

Si la función f es derivable en el intervalo I, la tangente a la curva en cualquier punto de abscisa $c \in [a,b]$ está por debajo del arco MP si la función es convexa. Si la función es cóncava, la tangente está por encima del arco MP.



FUNCION CONVEXA



FUNCION CONCAVA

Para que la función f, derivable en el intervalo I sea **convexa** en I, es necesario y suficiente que su derivada f' sea creciente en I.

La función $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en cualquier intervalo $I = [a,b]$ de **R**.

En efecto: $f'(x) = 2x \Rightarrow \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b-a} = \dfrac{2b-2a}{b-a} = 2 > 0 \Rightarrow f'$ es creciente $\Rightarrow$ f es convexa.

Para que la función f, dos veces derivable en el intervalo I, sea **convexa** en I, es necesario y suficiente que $f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in I$.

La función $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en todo intervalo I de **R**.

En efecto: $f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ f es convexa en I.

Para que la función f, derivable en el intervalo I sea **cóncava** en I, es necesario y suficiente que su derivada f' sea decreciente en I.

La función $f:\ ]-\infty, 0[\to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^3$ en cóncava en cualquier intervalo $I = [a,b] \subset]-\infty, 0[$.

En efecto: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b-a} = \dfrac{3b^2 - 3a^2}{b-a} = \dfrac{3(b+a)(b-a)}{b-a} = 3(b+a) < 0$ (puesto que a y b son dos números negativos) $\Rightarrow f'$ es decreciente $\Rightarrow$ f es cóncava.

Para que la función f, dos veces derivable en el intervalo I, sea **cóncava** en I, es necesario y suficiente que $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$.

La función $f:]-\infty, 0[\to R$ definida por $f(x) = x^3$ es cóncava en cualquier intervalo de su conjunto de definición.

En efecto: $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x < 0$, para todo $x < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es cóncava.

Para hallar los intervalos de convexidad y concavidad de una función f, se hallan las raíces de $f''(x) = 0$, y los valores de x en los que no existe f''. Tendremos así los posibles puntos en los que cambia la convexidad de la función.

Estudiemos la convexidad de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x\, e^{\frac{-x^2}{2}}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad f''(x) = -2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = x(x^2-3)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

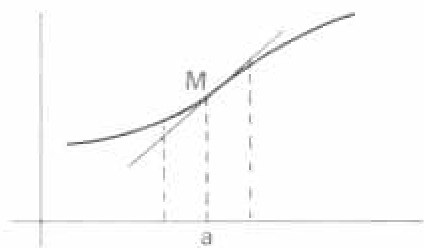
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3} \Rightarrow f''(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
f	cóncava		convexa		cóncava		convexa	

La definición que hemos dado de función convexa y función cóncava es la admitida internacionalmente. Las expresiones de cóncava (o convexa) hacia las $y > 0$ o hacia las $y < 0$ están anticuadas y deben evitarse.

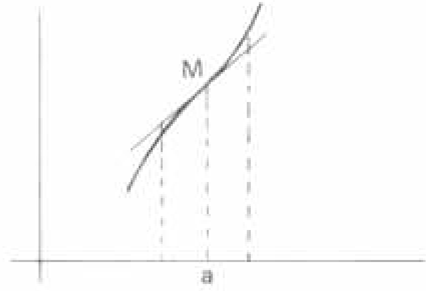
PUNTO DE INFLEXION.

Sea f una función real derivable en un entorno del punto a, y (C) su curva respecto de un sistema de referencia ortonormal.



El punto M[a, f(a)] es un **punto de inflexión** de (C) si la tangente a (C) en este punto atraviesa a la curva.

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa a es:



$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) \Rightarrow y_t = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

$$y_c - y_t = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a) \qquad (1)$$

El punto M[a, f(a)] es de inflexión si el signo de la expresión (1) en un entorno de a, es distinto para $x < a$ que para $x > a$.

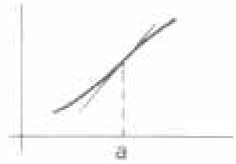
En el punto de inflexión la función pasa de convexa a cóncava, o de cóncava a convexa. Es condición necesaria, para que el punto de abscisa a sea de inflexión, que $f''(a) = 0$.

Si la función es continua en el punto a, y tiene derivada infinita en dicho punto pero con signos iguales a derecha e izquierda, se dice que M[a, f(a)] es un punto de inflexión con tangente vertical.

Dada la función f, para hallar los puntos de inflexión se calculan las raices de $f''(x) = 0$ y los valores de x para los que se hace infinita la expresión $f'(x)$. Tendremos así los posibles valores de x de los puntos de inflexión. El signo de $f''(x)$ a derecha e izquierda de cada una de las raices de $f''(x) = 0$ nos dirá si tenemos punto de inflexión. El signo de $f'(x)$ a derecha e izquierda de cada uno de los valores que hacen infinita a $f'(x)$ nos dirá si estos punto son o no de inflexión.

Sea a una raiz de $f''(x) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) > 0 \\ f''(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión}$$



$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) < 0 \\ f''(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) > 0 \\ f''(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{no hay punto de inflexión} \; ; \quad \left.\begin{array}{l} f''(a-h) < 0 \\ f''(a-h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{no hay punto de inflexión}$$

Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^4$:

$$f'(x) = 4x^3 \; ; \; f''(x) = 12x^2 \; ; \; f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 : \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f''(0-h) = 12(-h)^2 > 0 \\ f''(0+h) = 12h^2 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

el punto de abscisa $x = 0$ no es punto de inflexión.

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

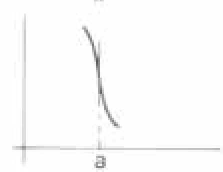
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \; ; \quad f''(x) = 6x - 12 \; ; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0, \; x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(2-h) = 6(2-h) - 12 < 0 \\ f''(2+h) = 6(2+h) - 12 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el punto de abscisa 2 es punto de inflexión}$$

Sea a un valor de x que hace $f'(x) = \pm\infty$:

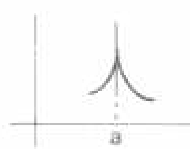
$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión con tangente vertical}$$

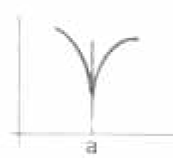
$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión con tangente vertical}$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de retroceso}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de retroceso}$$





Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$: $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(0) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-h) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(-h)^2}} > 0 \\ f'(0+h) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el punto (0,0) es punto de inflexión con tangente vertical.}$$

PROBLEMAS

11.1 Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = (x-1)e^x$$

(Univ. de León)

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = x \cdot e^x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$ (no tiene solución)

x	$-\infty$	0		$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$	
f(x)	decreciente		creciente	

11.2 Dada la función $f: [0, 2\pi] \to R$ definida por

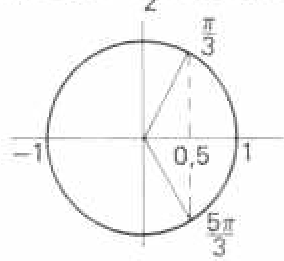
$$f(x) = x + 5 - 2 \operatorname{sen} x$$

hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Univ. de Santiago)

$f'(x) = 1 - 2\cos x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos x = 0$; $\cos x = \frac{1}{2}$. Los valores de x que cumplen esta igualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$ son:

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$



Para $x \in [0, \frac{\pi}{3}[$, $1 \geq \cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x < 0$, la función es decreciente

" $x \in]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$, $-1 < \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x > 0$, la función es creciente

" $x \in]\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$, $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x < 0$, la función es decreciente

11.3 **Hallar el conjunto original A de la función real $f: A \to R$ definida por**

$$f(x) = \log(x-1)(x-2)$$

y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Univ. de Santiago)

Como sólo los números mayores que cero tienen logaritmo (real), la función existirá solo para los valores de x que hagan $(x-1)(x-2) > 0$, o lo que es lo mismo, los valores de x para los que los factores $x-1$ y $x-2$ tengan el mismo signo. Estos factores se anulan en $x = 1$ y en $x = 2$, por tanto tendremos que estudiar su signo en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ y $]2, +\infty[$.

Para $x \in]-\infty, 1[$ $\quad \left|\begin{array}{l} x-1<0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

Para $x \in]1, 2[$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x-1>0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

Para $x \in]2, +\infty[$ $\quad \left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

de donde $\qquad A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)+(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$

El numerador se anula para $x = \frac{3}{2}$ y el denominador para $x = 1$ y $x = 2$. Para estudiar el signo de $f'(x)$ habría que ver el signo en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, \frac{3}{2}[$, $]\frac{3}{2}, 2[$ y $]2, +\infty[$, pero como sólo en el primero y en el último está definida la función f, los otros se descartan:

Para $x \in]-\infty, 1[$ $\quad \left|\begin{array}{l} 2x-3<0 \\ x-1<0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) < 0,$

la función es decreciente.

Para $x \in]2, +\infty[$ $\quad \left|\begin{array}{l} 2x-3>0 \\ x-1>0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) > 0$

la función es creciente.

11.4 **Demostrar que la ecuación**

$$x^3 - 36x + 10 = 0$$

no puede tener dos raíces reales en el intervalo $]-1, 2[$. ¿Tiene alguna raíz en este intervalo?

(Univ. de Málaga) – (Univ. de Murcia, 1991)

Estudiemos la función $f: [-1, 2] \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 36x + 10$:

$$f(-1) = -1 + 36 + 10 = 45 > 0 \;; \quad f(2) = 8 - 72 + 10 = -54 < 0$$

La función, por ser polinómica, es continua en el intervalo $[-1,2]$, y como $f(-1) \cdot f(2) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in]-1,2[$ tal que $f(c) = 0$. La ecuación tiene por lo menos una raíz.

$$f'(x) = 3x^2 - 36 = 3(x^2 - 12) \;; \quad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 12 = 0 \;; \; x = \pm\sqrt{12} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3(x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12}) \quad \Rightarrow$$

x	-1		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	45	$\searrow$	-54

$\Rightarrow$ la función es estrictamente decreciente en el intervalo $[-1,2]$, la raíz anterior es única.

11.5 Demostrar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.

(Univ. de Madrid, 1991)

Estudiemos la función $f: [0, 1] \to R$ definida por $f(x) = x^5 + x - 1$:

$$f(0) = -1 \;; \qquad f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

La función, por ser polinómica, es continua y como $f(0) \cdot f(1) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$, o sea que la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz.

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$ la función es estrictamente creciente, lo que implica que la raíz anterior es única.

11.6 Demostrar que para cada número real $x > 1$, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\log x \geq \frac{2(x-1)}{x+1} \qquad \text{(log = logaritmo neperiano)}$$

(Univ. de Valladolid, 1991)

Se verificará la desigualdad si la función $f: [1, +\infty[\to R$ definida por $f(x) = \log x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ es no negativa.

$$f(1) = \log 1 - \frac{2(1-1)}{1+1} = 0 - 0 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0 \quad \text{para } x \geq 1 \;\Rightarrow$$ la función f es creciente en todo su campo de definición.

Si $f(1) = 0$ y la función f es creciente, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[\;\Rightarrow\; \log x \geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}$

11.7 **Si $x > 0$, demostrar que** $x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$

(Univ. de Sevilla)

Consideremos la función $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = x - \log(1+x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \forall x > 0, \text{ siendo } f(0) = 0 - \log 1 = 0$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 creciente	

$\Rightarrow \quad \forall x > 0:\ f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x - \log(1+x) > 0 \quad \Rightarrow$

$x > \log(1+x) \qquad (1)$

Sea la función $g: R_+ \to R$ definida por $g(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$:

$$g(0) = 0\,;\quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0 creciente	

$\Rightarrow \quad \forall x > 0:\ g(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x} > 0 \quad \Rightarrow$

$\log(1+x) > \dfrac{x}{1+x} \qquad (2)$

De (1) y (2) resulta: $\quad \forall x > 0, \quad x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$

11.8 **Se considera la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

(Univ. de Madrid, 1991)

La función no está definida para $x = 1$, valor que anula el denominador

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0\,;\quad x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & f(0) = 0 \\ x = 2 & f(2) = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$		+	0	—		—	0	+	
f(x)		↗	0	↘		↘	4	↗	

La función es creciente en $]-\infty, 0[\ \cup\ ]2, +\infty[$, es decreciente en $]0, 1[\ \cup\ ]1, 2[$, tiene un máximo relativo para $x = 0$ y un mínimo relativo para $x = 2$.

11.9 **Si f es una función definida en $D = \{x \in R: \; 0 < x < 2\pi\}$ tal que $\forall x \in D$**

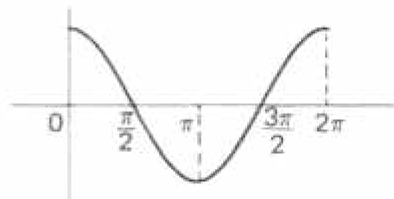
$$f'(x) = \frac{\cos x}{-x}$$

obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (no debe intentarse el cálculo de f).

(Univ. de Santiago)

Recordando la variación de $\cos x$ en el intervalo $]0, 2\pi[$ y como $-x$ es negativo en dicho intervalo:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)		—	0	+	0	—	
f(x)		↘		↗		↘	



o sea que la función es decreciente en los intervalos $]0, \frac{\pi}{2}[$ y $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, creciente en el intervalo $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, tiene un mínimo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un máximo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

11.10 **Encontrar las funciones polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea $x - 1$.**

¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$?

(Univ. de Valencia)

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $P''(x) = 6ax + 2b$

$$P''(x) = x - 1 \Rightarrow 6ax + 2b = x - 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 6a = 1 \\ 2b = -1 \end{array} \right. \Rightarrow a = \frac{1}{6} ; \quad b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d}$$

Si $P(x)$ tiene un mínimo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$, se verificará:

$$\left. \begin{array}{l} P(4) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6}4^3 - \frac{1}{2}4^2 + 4c + d = -\frac{1}{3} \\ P'(4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}4^2 - 4 + c = 0 \end{array} \right| \quad c = -4 ; \quad d = 13 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13}$$

11.11 **Obtener los extremos relativos y absolutos asi como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función**

$$f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$$

en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$

(Univ. de Madrid, 1991)

$f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$

Transformemos esta suma de senos en producto:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b$$

haciendo
$$\left.\begin{array}{l} a+b = x \\ a-b = \frac{\pi}{2} - x\end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} \; ; \; b = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$f'(x) = -\sqrt{2} \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) \;\; ; \;\; f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = 0 \; ; \; x = \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\end{array}\right.$$

$f(0) = \sqrt{2} \cdot \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$; $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos 0 = \sqrt{2}$; $f(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos \pi = -\sqrt{2}$;

$f(2\pi) = \sqrt{2} \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
f'(x)		+		−		+	
f(x)	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

La función es creciente en los intervalos $[0, \frac{\pi}{4}[$ y $]\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$, y es decreciente en el intervalo $]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$.

En $x = 0$ tiene un mínimo relativo, en $x = \frac{\pi}{4}$ un máximo absoluto, en $x = \frac{5\pi}{4}$ un mínimo absoluto y en $x = 2\pi$ un máximo relativo.

11.12 **Sea $f(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $c \in]a, b[$, razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) Si $f'(c) = 0$, entonces f admite máximo o mínimo relativo en c.
b) Si f admite máximo o mínimo relativo en c, entonces $f'(c) = 0$.

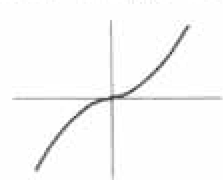
(Univ. de Valencia)

a) No se puede afirmar que la función f tenga en c un máximo o mínimo relativo.

Si la función f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, es condición necesaria, pero **no suficiente**, para que en $c \in]a, b[$ la función admita un máximo o mínimo relativo, que $f'(c) = 0$.

La función $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^3$, es continua en $[-1, 1]$, derivable en $]-1, 1[$

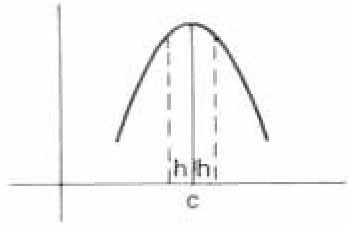
$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, y sin embargo no tiene máximo ni mínimo en $x = 0$:



$f(0-h) = (-h)^3 = -h^3$; $f(0) = 0$;

$f(h) = h^3 \Rightarrow f(0-h) < f(0) < f(0+h)$

b) Si f admite máximo en c, siendo $h > 0$:



$$f(c-h) - f(c) < 0 \Rightarrow \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geqslant 0$$

$$f(c+h) - f(c) < 0 \Rightarrow \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

como, por hipótesis, la función es derivable, existen ambos límites y son iguales. Como el primer límite es $\geqslant 0$ y el segundo $\leqslant 0$, para ser iguales tendrán que ser ambos nulos, o sea que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = 0$$

11.13 **Dada la función f: $]0, +\infty[$, definida por**

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

hallar sus máximos y mínimos.

(Univ. de Madrid)

$f(x)$ es positiva para todo $x > 0$.

Tomando logaritmos neperianos en $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$: $\quad \log f(x) = \frac{1}{x} \log x$

Derivando: $\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (1 - \log x) \Rightarrow$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \log x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} (1 - \log x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} (1 - \log x) = 0 \Rightarrow 1 - \log x = 0 \ ; \ \log x = 1 \ ; \ x = e$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$		↘	$\sqrt[e]{e}$	↗	

$\Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $x = e$.

1.14 **Obtener los extremos relativos de**

$$f(x) = x \cdot (\log x)^n$$

onde log es el logaritmo neperiano y n un número par igual o mayor que 2.

(Univ. de Cantabria)

(Tendremos en cuenta que $\log 1 = 0$, si $h > 0$: $\log(1-h) < 0$, $\log(1+h) > 0$, y que las potencias impares de números negativos son negativas).

$$f'(x) = 1\cdot(\log x)^n + x\cdot n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x} = (\log x)^{n-1}\cdot(\log x + n)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\log x)^{n-1}\cdot\log(x+n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\log x)^{n-1} = 0\,; & x = 1 \\ \log x + n = 0\,; & \log x = -n\,;\quad x = e^{-n} \end{cases}$$

Estudio en $x = 1$. Siendo $h > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1-h) = [\log(1-h)]^{n-1}\cdot[\log(1-h)+n] = (-\cdot+ = -) < 0 \\ f'(1+h) = [\log(1+h)]^{n-1}\cdot[\log(1+h)+n] = (+\cdot+ = +) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ existe un mínimo en}$$

$x = 1$ igual a $f(1) = 1\cdot(\log 1)^n = 1\cdot 0 = 0$

Estudio en $x = e^{-n}$: Si $\log e^{-n} = -n$, $\log(e^{-n} - h) < -n$, y $\log(e^{-n}+h) > -n$, de donde

$$\left.\begin{array}{l} f'(e^{-n}-h) = [\log(e^{-n}-h)]^{n-1}\cdot[\log(e^{-n}-h)+n] = (-\cdot- = +) > 0 \\ f'(e^{-n}+h) = [\log(e^{-n}+h)]^{n-1}\cdot[\log(e^{-n}+h)+n] = (-\cdot+ = -) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ existe un máxi-}$$

mo en $x = e^{-n}$ igual a $f(e^{-n}) = e^{-n}(\log e^{-n})^n = e^{-n}(-n)^n = \dfrac{n^n}{e^n}$.

11.15 **En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km, determinar la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.**

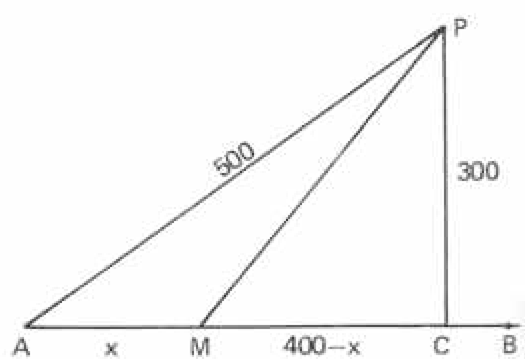
(Univ. de Murcia)

Sea C el pie de la perpendicular del punto P sobre la recta AB: en el triángulo rectángulo ACP:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$$

Sea M el punto donde el automóvil deja la carretera, si la distancia AM es igual a x: En el triángulo rectángulo MCP:

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{CP}^2} = \sqrt{(400-x)^2 + 300^2}$$



El tiempo que el automóvil tarda en recorrer la distancia AM + MP será:

$$t = \frac{x}{100} + \frac{\sqrt{(400-x)^2 + 90000}}{60}\,; \qquad t' = \frac{1}{100} + \frac{1}{60}\,\frac{2(400-x)(-1)}{2\sqrt{(400-x)^2 + 90000}}\,;$$

Es condición necesaria para que el tiempo sea mínimo que $t' = 0$:

$$t' = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} - \frac{400-x}{60\sqrt{(400-x)^2+90000}} = 0 \Rightarrow 60\sqrt{(400-x)^2+90000} = 100\,(400-x)\ ;$$

$$36\,[(400-x)^2 + 90000] = 100\,(400-x)^2\ ; \quad 64\,(400-x)^2 = 36\cdot 90000$$

$$400 - x = \frac{6\cdot 300}{8} = 225 \Rightarrow x = 175$$

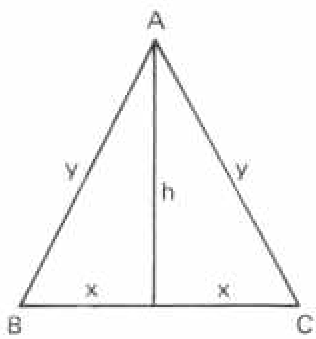
El automovil deja la carretera a 175 km del punto A.

11.16 Un triángulo isósceles de perimetro 10 m gira alrededor de la altura relativa al lado no igual engendrando un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

(Univ. de León)

Sean los lados $AB = AC = y$, $BC = 2x$: $2y + 2x = 10$ (1)

El volumen del cono es igual a un tercio del área e la base por la altura:



$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{1}{3}\pi x^2\cdot h \\ h = \sqrt{y^2 - x^2} \end{array}\right| \quad V = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2 - x^2} \qquad (2)$$

De (1): $y = 5 - x$, llevando este valor a (2)

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{(5-x)^2 - x^2} = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{25-10x}$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(2x\sqrt{25-10x} + x^2\cdot\frac{-10}{2\sqrt{25-10x}}\right) = \frac{1}{3}\pi\,\frac{2x(25-10x) - 5x^2}{\sqrt{25-10x}} = \frac{1}{3}\pi\,\frac{50x - 25x^2}{\sqrt{25-10x}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\frac{25x\,(2-x)}{\sqrt{25-10x}}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 25x\,(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(solución no válida, no habría triángulo)} \\ 2 - x = 0\ ; & x = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } h > 0:\quad V'(2-h) = \dfrac{1}{3}\pi\,\dfrac{25(2-h)h}{\sqrt{25-10(2-h)}} > 0 \\ \qquad\qquad\quad V'(2+h) = \dfrac{1}{3}\pi\,\dfrac{25(2+h)(-h)}{\sqrt{25-10(2+h)}} < 0 \end{array}\right| \quad \text{la función } \mathbf{V} \text{ tiene un máximo para } x = 2$$

Si $x = 2$, los lados valen: $BC = 2x = 4$; $AB = AC = y = 5 - x = 5 - 2 = 3$

11.17 Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función f: $]0, +\infty[\ \rightarrow R$ definida por

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \qquad \textbf{(log = logaritmo neperiano)}$$

(Univ. de Castilla–La Mancha, 1991)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \log x = 0\ ;\ \log x = 1\ ;\quad x = e$$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	—	
f(x)		creciente	máximo	decreciente	

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{-1 - 2(1 - \log x)}{x^3} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 \log x - 3}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 \log x - 3 = 0\ ;\quad \log x = \frac{3}{2}\ ;\quad x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''(x)		—		+	
f(x)		cóncava		convexa	

11.18 Estudiar la concavidad de la función f: R → R definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

(Univ. de Salamanca)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} (-x)x + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot 1 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} (1 - x^2)$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{-x^2}{2}} (1 - x^2) = 0 \Rightarrow$ (puesto que $e^{\frac{-x^2}{2}} \neq 0$ cualquiera que sea x)

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -1$

Estos son los posibles valores de x en los que cambia el signo de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''(x)		+		—		+	
f(x)		convexa		cóncava		convexa	

11.19 **Hallar los valores de m para que la función f: R → R definida por**

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

sea convexa para todo $x \in R$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3$; $f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m = 2(6x^2 + 12x + m)$

La función será convexa todo $x \in R$, si para todo valor real de x se verifica que $f''(x) \geq 0$.

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es ≥ 0 para todo valor real de x si $a > 0$ y sus raices son imaginarias o iguales ($b^2 - 4ac \leq 0$).

$$6x^2 + 12x + m \geq 0 \Rightarrow 12^2 - 4 \cdot 6 \cdot m \leq 0 \Rightarrow 144 \leq 24\,m ; \quad \boxed{m \geq 6}$$

11.20 **Estudiar, según los valores de a, la concavidad y convexidad de la función f: R → R definida por**

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + x + 1$$

(Univ. de Alicante)

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + 1 \ ; \quad f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a$$

Hallemos las raices de $f''(x) = 0$: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 24a}}{12}$

— si $36 - 24a = 0$: $a = \dfrac{36}{24} = \dfrac{3}{2}$, las dos raices son iguales: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$: $f''(x) = 12(x + \dfrac{1}{2})^2 \geq 0$, la función será convexa $\forall x \in R$

— si $36 - 24a > 0$: $a < \dfrac{3}{2}$, las dos raices son distintas, $x_1 \neq x_2$: $f''(x) = 12(x - x_1)(x - x_2)$ y según x pertenezca o no al intervalo $[x_1, x_2]$, $f''(x)$ será negativa o positiva, y la función f será cóncava o convexa.

— si $36 - 24a < 0$: $a > \dfrac{3}{2}$, las raices serán imaginarias; $x_1 = m + ni$; $x_2 = m - ni$;

$f''(x) = 12(x - m - ni)(x - m + ni) = 12[(x - m)^2 + n^2] > 0$, la función será convexa $\forall x \in R$.

11.21 **Estudiar la existencia de extremos relativos para la función f: R → R definida por**

$$f(x) = (x + 1)^{101}$$

¿Es inyectiva? ¿Y biyectiva?

(Univ. de Murcia)

$f'(x) = 101(x + 1)^{100}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 101 \cdot (x + 1)^{100} = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1-h) = 101(-1 - h + 1)^{100} = 101(-h)^{100} > 0 \\ f'(-1+h) = 101(-1 + h + 1)^{100} = 101(h)^{100} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{la función tiene en } x = -1 \text{ un pun-}$$

to de inflexión con tangente horizontal, siendo estrictamente creciente en todos sus puntos, ya que $f'(x) > 0$ para todo valor real de x, excepto para $x = 0$ que es igual a 0.

La función, por ser extrictamente creciente en todos sus puntos, en inyectiva y biyectiva.
También se puede estudiar así: Si a y b son dos números reales cualesquiera:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\ ,\ \text{ya que}\ (a+1)^{101} \neq (b+1)^{101} \Rightarrow f\ \text{es inyectiva}$$

Sea a un número real cualquiera. Veamos cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = a$:

$f(x) = a \Rightarrow (x+1)^{101} = a \Rightarrow x+1 = a^{\frac{1}{101}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{101}} - 1$, una sola solución, esto implica que f es biyectiva.

11.22 **Dada la función** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

hallar los coeficientes a, b, c y d, sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es $y = -3x + 3$

y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$.

(Univ. del País Vasco)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\ ;\quad f''(x) = 6ax + 2b$$

— la curva pasa por el punto $(1, 0)$: $0 = a + b + c + d$ (1)

— la recta $y = -3x + 3$ es tangente a la curva en el punto $(1, 0)$: $f'(1) = 3a + 2b + c = -3$ (2)

— el punto $(1, 0)$ es de inflexión: $f''(1) = 6a + 2b = 0$ (3)

— la función presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$: $3a\cdot 0 + 2b\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ (4)

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) forman el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \\ 3a + b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right| \quad c = 0 \quad \Big| \quad b = -3\ ,\ a = 1 \quad \Big| \quad d = 2$$

de aquí:

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$$

11.23 **Dada la función** $f: R \to R$ **definida por**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

hallar los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que la función tiene un máximo en el punto (0, 3), un mínimo para $x = 2$, **y un punto de inflexión en el punto (1, 1).**

(Univ. de León)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ ;\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\ ;\quad f''(x) = 6ax + 2b$$

— si la función tiene un máximo en el punto $(0, 3)$:

$$\left|\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} d = 3 & (1) \\ c = 0 & (2) \end{array}$$

— si la función tiene un mínimo en $x = 2$:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 4 + 2b \cdot 2 + c = 0 \;;\quad 12a + 4b + c = 0 \qquad (3)$$

— si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 1)$:

$$\left|\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f''(1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} a + b + c + d = 1 & (4) \\ 6a + 2b \qquad = 0 & (5) \end{array}$$

Las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) forman el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 12a + 4b + c \quad = 0 \\ 3a + b \qquad = 0 \\ d = 3 \\ c \qquad = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 3}$$

11.24 **Sea $f: R \to R$ la función definida por**

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{array}\right. \quad \text{(a y b números reales)}$$

Hallar a y b para que f sea continua y derivable en el punto $x = 0$. Para los anteriores valores de a y b, analizar si la función f tiene inflexión en el punto $x = 0$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [-(0 + h)^2 + a(0 + h) + b] = b$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 - h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \operatorname{sen}(0 - h) = 0$$

La función será continua en $x = 0$ si $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0 - h) = f(0) \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-h^2 + ah + 0 - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} (-h + a) = a$$

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0 - h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\operatorname{sen}(-h) - 0}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-\operatorname{sen} h}{-h} = 1$$

La función será derivable en $x = 0$ si $f'(0)^+ = f'(0)^- \Rightarrow \boxed{a = 1}$.

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{array}\right. \;;\quad f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

$$f''(x) = \left\{\begin{array}{ll} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \text{no existe} & \text{si } x = 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \text{para } x \to 0^- \quad (\operatorname{sen} x < 0 \text{ si } x \to 0^-) \\ f''(x) < 0 & \text{para } x \to 0^+ \end{array}\right.$$

Nota: Como $f''(0)^- = \lim_{x \to 0^-} (-\operatorname{sen} x) = 0 \neq f''(0)^+ = -2$, no existe $f''(0)$.

Como existe tangente en $x = 0$, ya que existe $f'(x)$, y cambia el signo de $f''(x)$ a la derecha e izquierda de $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

11.25 **Consideremos la función** $f(x) = |x^2 - 4|$

Se pide: **a) Razonar en qué puntos es derivable y en cuales no lo es.**

b) Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) Representar gráficamente la función.

(Univ. de Valencia)

Considerando que:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{" " " " " " " } f(x) < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ los posibles puntos donde $x^2 - 4$ cambia de signo son -2 y 2.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{para } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ -(x^2-4) = -x^2 + 4 & \text{para } x \in]-2, 2[\end{cases}$$

Las dos formas de la función son polinómicas, luego sólo hay duda de su derivabilidad en $x = -2$ y $x = 2$, donde cambia la expresión de la función. En los demás casos es derivable.

Estudio de la derivabilidad en $x = -2$:

$$f'(-2)^- = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(-2-h) - f(-2)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|(-2-h)^2 - 4| - 0}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h^2 + 4h}{-h} =$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} (-h - 4) = -4$$

$$f'(-2)^+ = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|-(-2+h)^2 + 4| - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-h^2 + 4h}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} (-h + 4) = 4$$

Como las derivadas por la derecha y por la izquierda no son iguales, la función no es derivable en $x = -2$.

De la misma forma se demuestra que no es derivable en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } -\infty < x < -2 \\ \text{no existe} & \text{para } x = -2 \\ -2x & \text{para } 2 < x < 2 \\ \text{no existe} & \text{para } x = 2 \\ 2x & \text{para } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

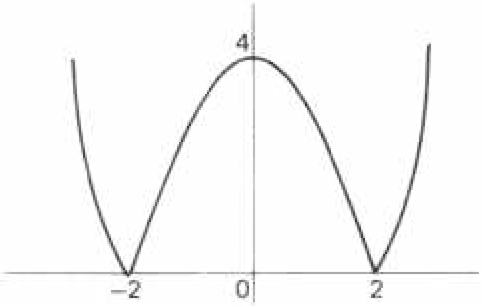
b) Del estudio anterior resulta el siguinte cuadro:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$		decreciente	0	creciente	4	decreciente	0	creciente	

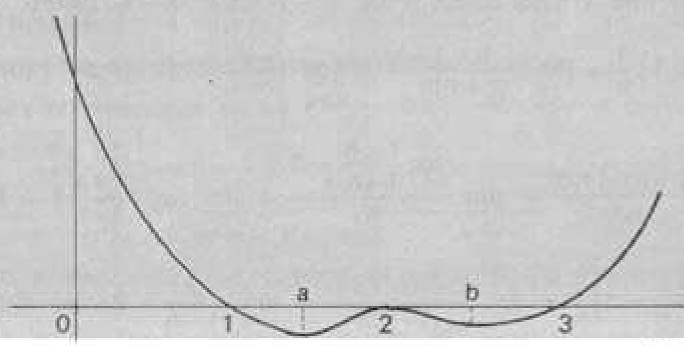
La función tiene dos mínimos absolutos en $x = -2$ y $x = 2$, y un máximo relativo en $x = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } -\infty < x < -2 & \Rightarrow \text{la curva es convexa} \\ \text{no existe} & \text{para } x = -2 & \\ -2 & \text{para } -2 < x < 2 & \Rightarrow \text{la curva es cóncava} \\ \text{no existe} & \text{para } x = 2 & \\ 2 & \text{para } 2 < x < +\infty & \Rightarrow \text{la curva es convexa} \end{cases}$$

c)



11.26 **Para qué valores de x presenta máximos, mínimos y puntos de inflexión la función f, si su derivada que es continua y derivable, tiene la gráfica que se indica en la figura.**



(Univ. de Santiago)

De la gráfica de f' se deduce que f'' se anula en los punto a, 2 y b, tales que $1 < a < 2 < b < 3$, deduciéndose el siguiente cuadro:

	$-\infty$		1		a		2		b		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—	—	—	0	—	—	—	0	+	
$f''(x)$		—	—	—	0	+	0	—	0	+	+	+	
$f(x)$		↗	máximo	↘	p. inflexión	↘	p. inflexión	↘	p. inflexión	↘	mínimo	↗	

La función f presenta un máximo para $x = 1$, un mínimo para $x = 3$, y puntos de inflexión para $x = a$ $(1 < a < 2)$, $x = 2$ (punto de inflexión con tangente horizontal), y para $x = b$ $(2 < b < 3)$.

11.27 **Estudiar la gráfica de la función**

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x) \qquad (\log = \text{logaritmo neperiano})$$

en un entorno del punto $x = 0$.

(Univ. de Cantabria)

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

Estudio de la continuidad en x = 0:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \log \frac{1+(0-h)}{1-(0-h)} = \log 1 = 0\\
&\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \log \frac{1+(0+h)}{1-(0+h)} = \log 1 = 0\\
&f(0) = \log \frac{1+0}{1-0} = \log 1 = 0
\end{aligned}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = 0.$$

Estudio de la derivabilidad en x = 0:

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\log\frac{1-h}{1+h} - 0}{-h} = -1 \cdot \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \log\left(\frac{1-h}{1+h}\right)^{\frac{1}{h}}$$

se trata de un límite del tipo 1^∞, por tanto: $f'(0)^- = -1 \cdot \log e^\lambda = -\lambda$, siendo

$$\lambda = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\frac{1-h}{1+h} - 1\right)\frac{1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-h-1-h}{(1+h)h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-2}{1+h} = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(0)^- = -(-2) = 2$$

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\log\frac{1+h}{1-h} - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \log\left(\frac{1+h}{1-h}\right)^{\frac{1}{h}} = \log e^\mu = \mu$$

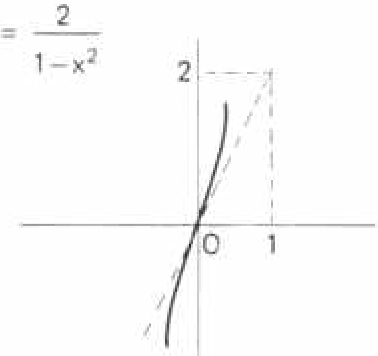
siendo $\mu = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\frac{1+h}{1-h} - 1\right)\frac{1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1+h-1+h}{(1-h)h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2}{1-h} = 2 \Rightarrow f'(0)^+ = 2$

$f'(0)^- = f'(0)^+ = f'(0) = 2$, la función es derivable en $x = 0$.

La tangente en el punto $(0, 0)$ es: $\quad y - 0 = f'(0)\cdot(x-0)\ ;\quad y = 2x$

$$f(x) = \log\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{1+x}\,\frac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \quad \Rightarrow$$



para $x < 0$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava

para $x > 0$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa

en $x = 0$ tiene un punto de inflexión.

CAPITULO 12

TEOREMA DE ROLLE
TEOREMA DEL VALOR MEDIO
TEOREMA DE CAUCHY
REGLA DE L'HOPITAL
FORMULA DE TAYLOR

TEOREMA DE ROLLE.

Si f es una función real que cumple las tres condiciones siguientes:

— está definida y es continua en $[a, b]$

— es derivable en $]a, b[$

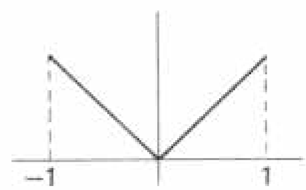
— $f(a) = f(b)$

existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

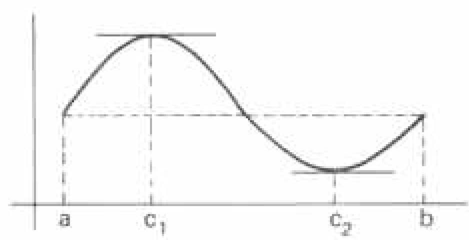
Si falta alguna de las tres condiciones, no tiene por qué verificarse el teorema.

La función $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

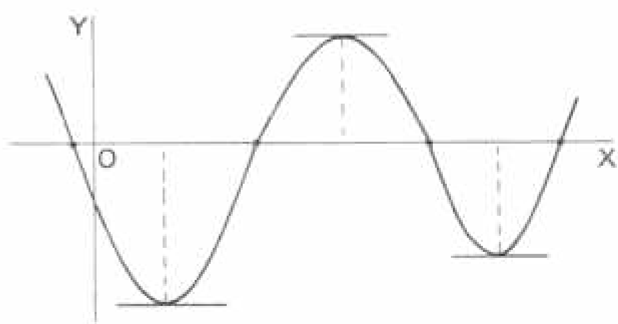
está definida y es continua en $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$, pero no es derivable en $]-1, 1[$ ya que no es derivable en $x = 0$. No se verifica el teorema de Rolle.



Geométricamente, el teorema de Rolle expresa que si la función f está definida y es continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y $f(a) = f(b)$, la curva de la función f tiene al menos un punto en el que la tangente es paralela al eje OX.



Del teorema de Rolle se deduce: Si la función f es derivable en el intervalo I, entre dos raices reales y distintas de la ecuación $f(x) = 0$ pertenecientes a I, hay al menos una raiz de $f'(x) = 0$. Si $f(x) = 0$ tiene n raices reales y distintas en I, $f'(x) = 0$ tiene al menos $n-1$ raices distintas en I.



Si $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$, la ecuación $f'(x) = 0$ tiene tres raices reales.

En efecto: Sea la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$, que por ser una función polinómica es continua y derivable en $\mathbf{R}$. Por tanto es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $]-1, 1[$. Como además, $f(-1) = f(1)$, según el teorema de Rolle, existe un número real $c \in]-1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$.

De la misma forma se demuestra que existe una raiz en el intervalo $]1, 2[$, y otra en el intervalo $]2, 3[$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE.

Si la función f cumple las dos condiciones siguientes:

— f es continua en el intervalo $[a, b]$.

— f es derivable en el intervalo $]a, b[$

entonces existe, al menos un punto $c \in]a, b[$, tal que

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

Haciendo $b = a + h$, la fórmula anterior se escribe:

$$\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)} \qquad (0 < \theta < 1)$$

Este teorema se conoce también como **teorema de los incrementos finitos.**

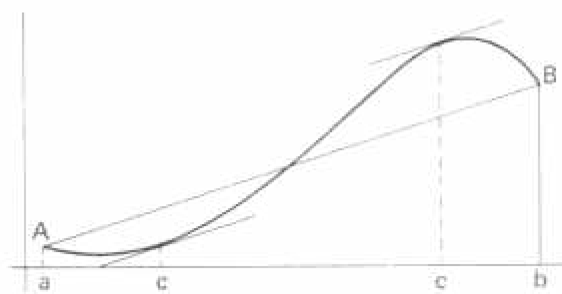
La fórmula es válida tanto si $a > b$ como si $a < b$, o $h > 0$ y $h < 0$.

Si hacemos $b = x$, $c = a + \theta(x - a)$, siendo $0 < \theta < 1$:

la fórmula del valor medio se escribe

$$\boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'[a + \theta(x - a)]}$$

Geometricamente, el teorema del valor medio nos dice que entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ de la curva de la función f, existe, al menos, un punto de la curva en el que la tangente es paralela a la recta definida por los puntos A y B.



Este teorema nos permite demostrar ciertas desigualdades, como la del ejemplo siguiente.

Sea demostrar las desigualdades: $\frac{x}{1 + x^2} \leqslant \text{arc tg } x \leqslant x \qquad \forall x > 0$

La función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \text{arc tg } x$ es continua y derivable en $\mathbf{R}$. Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$, $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x), \ (0 < \theta < 1) \Rightarrow \frac{\text{arc tg } x - \text{arc tg } 0}{x - 0} = \frac{1}{1 + (\theta x)^2}, \text{ siendo } 0 < \theta < 1 \Rightarrow$$

$$\text{arc tg } x = \frac{x}{1 + \theta^2 x^2} \ (0 < \theta < 1) \Rightarrow \frac{x}{1 + 1^2 x^2} \leqslant \frac{x}{1 + \theta^2 x^2} \leqslant \frac{x}{1 + 0^2 x^2} \Rightarrow \frac{x}{1 + x^2} \leqslant \text{arc tg } x \leqslant x, \ \forall x > 0.$$

El teorema del valor medio nos permite demostrar la siguiente propiedad: Si la función f es continua y derivable en el intervalo compacto I (cerrado y acotado), siendo $f'(x) = 0$ en todo punto de I, entonces f es una función constante.

Si a y b son dos puntos cualesquiera de I, aplicando el teorema del valor medio a f en $[a, b]$, existe $c \in]a, b[$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c) = (b - a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(b) = f(a)$$

TEOREMA DE CAUCHY.

Si f y g son dos funciones que cumplen las propiedades:

— están definidas y son continuas en el intervalo $[a, b]$

— son derivables en el intervalo $]a, b[$

— $g(a) \neq g(b)$.

— $g'(x)$ no se anula en ningún punto de $]a, b[$

existe, al menos, un punto $c \in]a, b[$, tal que

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Haciendo $b = a + h$, la fórmula anterior se escribe de la forma:

$$\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)}} \quad , \text{ siendo } 0 < \theta < 1$$

si $a = x$:

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x + \theta h)}{g'(x + \theta h)}} \quad , \text{ siendo } 0 < \theta < 1$$

¿Se puede aplicar el teorema de Cauchy a las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3 + 4$ en el intervalo $[2, 3]$? En caso afirmativo determinar el valor de c.

Las dos funciones son polinómicas, luego son continuas y derivables en cualquier intervalo de R. $g(2) = 12, g(3) = 31$, $g(2) \neq g(3)$, y $g'(x) = 3x^2$ no se anula en ningún punto de $]2, 3[$.

Por cumplirse todas las condiciones anteriores, se puede aplicar el teorema de Cauchy.

$$\frac{f(3) - f(2)}{g(3) - g(2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{10 - 5}{31 - 12} = \frac{2c}{3c^2} \Rightarrow \frac{5}{19} = \frac{2}{3c} \Rightarrow c = \frac{38}{15} = 2{,}53 \in]2, 3[$$

REGLA DE L'HOPITAL.

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguiente condiciones:

— ambas funciones son derivables en un entorno del punto a

— $f(a) = g(a) = 0$

— existe el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Si $f'(a) = g'(a) = 0$, siendo las funciones f' y g' derivables en a, se podría aplicar de nuevo la regla de L'Hopital, y así sucesivamente. En este caso, es conveniente, antes de aplicar de nuevo la regla de L'Hopital, simplificar la expresión resultante, pues a veces con esta simplificación desaparece la indeterminación.

Calcular

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$$

(Univ. de Murcia)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \cos^2 x \cdot \frac{\cos x - 1}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \cos^2 x \cdot \frac{-(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{-1}{2}$$

La regla de L'Hopital se emplea también en los límites del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

También se puede emplear la regla de L'Hopital en los límites del tipo:

★ $0\cdot\infty$, considerando que $\lim f(x)\cdot g(x) = \lim \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\log x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{(L'Hopital)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

★ $\infty-\infty$, considerando que $\lim [f(x)-g(x)] = \lim \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x\cdot\log(1+x)} \overset{(L'Hopital)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\log(1+x)-(1+x)\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(1+x)\log(1+x)}{(1+x)\log(1+x)+x} \overset{(L'Hopital)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1+x)-\frac{1+x}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1+x)-1}{\log(1+x)+1+1} = \frac{-0-1}{0+1+1} = -\frac{1}{2}$$

★ 0^0, ∞^0, 1^∞, considerando que $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim [g(x)\cdot\log f(x)]}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} \overset{(L'Hopital)}{=} e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

FORMULA DE TAYLOR.

Si f es una función real que cumple las propiedades:

— admite derivadas continuas hasta el orden n en el intervalo $[a,b]$

— admite una derivada de orden $n+1$ en el intervalo $]a,b[$

existe $c\in\,]a,b[$ tal que:

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}} \quad (1)$$

El último término se llama *término complementario de Lagrange*.

Si en (1) hacemos $b=a+h$, $b-a=h$, $c=a+\theta h$ siendo $0<\theta<1$, la fórmula de Taylor se puede escribir de la forma:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \frac{f'(a)}{2!}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}\,h^n + \frac{f^{(n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!}\,h^{n+1}} \qquad (2)$$

Si en (1) hacemos $b = x$, $c = a + \theta(x-a)$ siendo $0 < \theta < 1$, obtenemos otra forma de la fórmula de Taylor:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Esta última forma nos permite expresar un polinomio en función de potencias de $x - a$.

Expresar el polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ como suma de potencias de $x - 2$.

(Univ. de Valencia)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f^{4)}(x) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow f(2) = 0\,; \qquad \begin{array}{r|rrr} & 3 & -12 & 12 \\ 2 & & 6 & 12 \\ \hline & 3 & -6 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow f'(2) = 0\,;$$

$f''(2) = 6\cdot 2 - 12 = 0\,;\quad f'''(2) = 6$

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 = 0 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{0}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = (x-2)^3$$

Fórmula de Mac–Laurin.

Si en (2) hacemos $a = 0$ y $h = x$:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}}\ , \quad 0 < \theta < 1$$

Desarrollar $f(x) = x\cdot e^x$ por la fórmula de Mac–Laurin, escribiendo el término complementario correspondiente a la cuarta derivada.

(Univ. de La Laguna, Tenerife)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x\,e^x \\ f'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)e^x \\ f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x \\ f'''(x) = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x \\ f^{(4}(x) = x^x + (3+x)e^x = (4+x)e^x \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1\cdot e^0 = 1 \\ f''(0) = 2\cdot e^0 = 2 \\ f'''(0) = 3\cdot e^0 = 3 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{(4+\theta x)e^{\theta x}}{4!}x^4 =$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{(4+\theta x)e^{\theta x}}{24}x^4 \qquad (0 < \theta < 1)$$

APLICACIONES DE LA FORMULA DE TAYLOR:

— *expresar (aproximadamente) una función como suma de potencias de x o de x − a:*

Según el ejemplo anterior: $x \cdot e^x \approx x + x^2 + \dfrac{x^3}{2}$

— *calcular aproximadamente el valor de una función en un punto.* Obteniendo una cota del término complementario tendremos una cota de la diferencia entre el valor verdadero y el hallado.

Haciendo uso del ejemplo anterior podemos considerar que:

$$0{,}5 \cdot e^{0{,}5} = 0{,}5 + (0{,}5)^2 + \frac{(0{,}5)^3}{2} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}062 = 0{,}812$$

$$\text{error} = \frac{(4 + \theta \cdot 0{,}5)\, e^{\theta \cdot 0{,}5}}{24}\,(0{,}5)^4, \text{ y al ser } 0 < \theta < 1 \text{ y } 2 < e < 3: \; \theta \cdot 0{,}5 < 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ y}$$

$$e^{\theta \cdot 0{,}5} < e^{0{,}5} = \sqrt{e} < \sqrt{3} = < 1{,}74 \quad \text{de donde:} \qquad \text{error} < \frac{(4 + 0{,}5) \cdot 1{,}74}{24}\,(0{,}5)^4 = 0{,}021$$

— *demostrar desigualdades:*

Sea demostrar que para $x > 0$: $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$, $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n}(x) = f^{(n+1}(x) = e^x \Rightarrow f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n}(0) = 1$$

Aplicando la fórmula de Mac–Laurin:

$$\left.\begin{array}{l} e^x = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ \text{para } x > 0: \quad 1 + \dfrac{1}{1!}x + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} > 0, \end{array}\right| \Rightarrow e^x > \frac{x^n}{n!}$$

— *estudiar los máximos y mínimos:*

La función f tiene un máximo en el punto a si, siendo h un infinitésimo:

$$f(a + h) - f(a) < 0 \qquad (h \gtrless 0)$$

y tiene un mínimo si

$$f(a + h) - f(a) > 0$$

Si la función f admite derivadas continuas hasta el orden n + 1 en un entorno de a, como es condición necesaria para que la función tenga máximo o mínimo en el punto a que $f'(a) = 0$, por la fórmula de Taylor se tiene:

$$f(a + h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1}(a + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Si h es un infinitésimo, el signo del segundo miembro es igual al del primer término no nulo. Sea éste el de orden k, o sea que:

$$f'(a) = \cdots = f^{(k-1}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(k}(a) \neq 0$$

se tendrá: $$f(a + h) - f(a) = \frac{f^{(k}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(k+1}(a)}{(k+1)!}h^{k+1} + \cdots$$

si k es par, $h^k > 0$, y el signo de $f(a + h) - f(a)$, es el de $f^{(k}(a)$, habrá máximo o mínimo según sea $f^{(k}(a) <$ ó $>$ que 0. Si k es impar, h^k cambiará de signo según sea h positivo o negativo, el signo de $f(a + h) - f(a)$ no será constante en el entorno de a, no habrá ni máximo ni mínimo.

En resumen, obtenida la raiz a de $f'(x) = 0$, para saber si en este punto hay máximo o mínimo o punto de inflexión se procede así:

$$f'(a) = 0 \begin{cases} f''(a) > 0 & \text{mínimo} \\ f''(a) < 0 & \text{máximo} \\ f''(a) = 0 & \begin{cases} f'''(a) \neq 0 & \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ f'''(a) = 0 & \begin{cases} f^{(4}(a) > 0 & \text{mínimo} \\ f^{(4}(a) < 0 & \text{máximo} \\ f^{(4}(a) = 0 & \begin{cases} f^{(5}(a) \neq 0 & \text{p. inflexión con tg. hor.} \\ f^{(5}(a) = 0 & \begin{cases} f^{(6}(a) > & \text{mínimo} \\ f^{(6}(a) < & \text{máximo} \\ f^{(6}(a) = 0 \ldots\ldots\ldots & \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Si la primera derivada que no se anula en el punto a, después de $f'(a) = 0$, es de orden par, hay máximo o mínimo, y si es de orden impar, hay punto de inflexión con tangente horizontal.

Sea hallar los máximos y mínimos de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^4(6 - x^2)$.

$$f(x) = 6x^4 - x^6 \; ; \qquad f'(x) = 24x^3 - 6x^5 = 6x^3(4 - x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0, \; x = 0 \\ 4 - x^2 = 0, \; x = 2, \; x = -2 \end{cases}$$

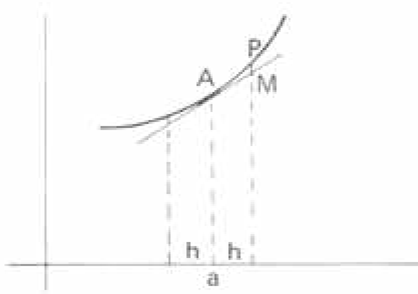
$$f''(x) = 72x^2 - 30x^4 \; ; \; f'''(x) = 144x - 120x^3 \; ; \; f^{(4}(x) = 144 - 360x^2$$

$f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = 0$; $f^{(4}(0) = 144 > 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay un mínimo

$f'(2) = 0$; $f''(2) = 72 \cdot 4 - 30 \cdot 16 = -192 < 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo

$f'(-2) = 0$; $f''(-2) = 72 \cdot 4 - 30 \cdot 16 = -192 < 0 \Rightarrow$ en $x = -2$ hay un máximo

— *estudiar la convexidad, concavidad y puntos de inflexión:*



Sea la función f que admite derivadas continuas hasta el orden $n + 1$ en un entorno a.

La ecuación de la tangente a la curva $y_c = f(x)$ en el punto de abscisa a es:

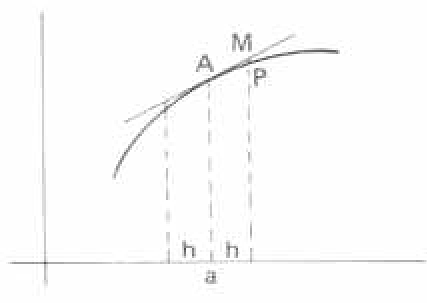
$$y_t - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow y_t = f(a) + f'(a)(x - a)$$

haciendo $x = a + h$:

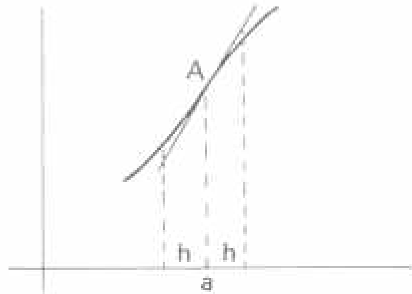
$$\text{dist}(MP) = y_c - y_t = f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h$$

y considerando la fórmula de Taylor:

$$y_c - y_t = \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} h^3 + \frac{f^{(4}(a)}{4!} h^4 + \frac{f^{(5}(a)}{5!} h^5 + \cdots$$



si h es un infinitésimo, el signo del segundo miembro es igual al del primer término no nulo:



$f''(a) > 0 \Rightarrow y_c - y_t > 0$, la función es convexa en a

$f''(a) < 0 \Rightarrow y_c - y_t < 0$, la función es cóncava en a

$f''(a) = 0$:

- $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ el signo de $y_c - y_t$ depende del signo de h, la función tiene en el punto a un punto de inflexión.
- $f'''(a) = 0$:
  - $f^{(4}(a) > 0 \Rightarrow y_c - y_t > 0$, la función es convexa en a.
  - $f^{(4}(a) < 0 \Rightarrow y_c - y_t < 0$, la función es cóncava en a.
  - $f^{(4}(a) = 0$:
    - $f^{(5}(a) \neq 0$, punto de inflexión en a
    - $f^{(5}(a) = 0$, ...

Sea $k > 1$ el orden de la primera derivada no nula en el punto a, si k es impar, la curva de la función f tiene en el punto de abscisa a un punto de inflexión, si k es par y $f^{(k}(a) > 0$, la función es convexa en a y si $f^{(k}(a) < 0$, la función es cóncava en a.

Sea hallar la concavidad o convexidad en el punto 0 de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^n$, siendo n un número natural.

$$f'(x) = nx^{n-1}\ ;\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\ ;\ f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}; \ldots;\ f^{(n-1}(x) = n!\cdot x\ ;\ f^{(n}(x) = n!$$

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1}(0) = 0\ ;\ f^{(n}(0) = n! > 0$$

— si n es par, la función es convexa en 0.

— si n es impar, la curva de la función tiene en $x = 0$ un punto de inflexión (con tangente horizontal, por ser $f'(0) = 0$).

PROBLEMAS

12.1 **Comprobar que la función $f(x) = x^2 + 2x + 5$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 3]$ y que, efectivamente verifica dicho teorema.**

(Univ. de Extremadura)

Por ser una función polinómica, es una función continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en el intervalo $]-1, 3[$. Como además $f(-1) = f(3) = 2$, se cumplen las condiciones del teorema de Rolle, por tanto existe $a \in]-1, 3[$, tal que $f'(a) = 0$.

$$f'(x) = -2x + 2 \ ; \quad -2a + 2 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{a = 1}$$

12.2 **¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f: R \to R$ definida por**

$$f(x) = 1 - x^2$$

en el intervalo $[-1, 1]$? ¿Y en el $[0, 1]$? En caso afirmativo comprobar su verificación.

(Univ. de Santiago)

La función f es continua en el intervalo $[-1, 1]$, derivable en el intervalor $]-1, 1[$ y $f(-1) = f(1)$, luego es aplicable el teorema de Rolle a la función f en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f'(x) = -2x \ ; \ f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ -2x = 0, \ x = 0 \ \Rightarrow \ \exists x = 0 \in]-1, 1[\ / \ f'(0) = 0.$$

La función f es continua en el intervalo $[0, 1]$, derivable en el intervalo $]0, 1[$, pero como $f(0) \neq f(1)$, $1 \neq 0$, no se puede aplicar el teorema de Rolle a la función f en el intervalo $[0, 1]$.

12.3 **Razonar si la función $f: R \to R$ definida por**

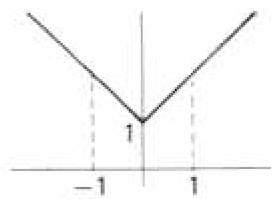
$$f(x) = 1 + |x|$$

satisface el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$.

(Univ. de Castilla–La Mancha) (Univ. de La Laguna–Tenerife)

Considerando que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, se tiene: $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La función f no es derivable en $x = 0$, ya que



$$f'(0)^{+} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|1+(0+h)|-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0)^{-} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{|1-(0-h)-1|}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

Como la función f no es derivable en todos los puntos de $]-1, 1[$, no satisface el teorema de rolle en $[-1, 1]$.

12.4 **¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f: [0, \pi] \to R$, definida por**

$$f(x) = |\cos x|$$

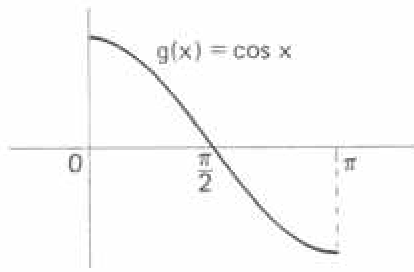
en el intervalo $[0, \pi]$?

(Univ. de Granada)

Considerando que $|F(x)| = \begin{cases} F(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } F(x) \geqslant 0 \\ -F(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } F(x) < 0 \end{cases}$

de la variación de $\cos x$ en $[0, \pi]$ resulta que

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x & \text{para } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$



La función f es continua en $[0, \pi]$, su continuidad se deduce de la continuidad de la función g definida por $g(x) = \cos x$.

Como la función g es derivable en $]0, \pi[$, sólo tendremos que estudiar la derivabilidad de la función f en $x = \frac{\pi}{2}$, punto donde cambia la forma de la función.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\cos\frac{\pi}{2}}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\operatorname{sen} h - 0}{-h} = -1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\cos\frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-(-\operatorname{sen} h)-0}{h} = 1$$

la función no es derivable en $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$, por lo tanto no se puede aplicar el teorema de Rolle.

12.5 **Sea la función $f: [-1, 1] \to R$, definida por**

$$f(x) = 4 + \sqrt[3]{x^8}$$

Comprobar si es aplicable el teorema de Rolle a la función f en el intervalo $[-1, 1]$.

(Univ. de La Laguna — Tenerife)

$$f(-1) = 4 + \sqrt[3]{(-1)^8} = 4 + \sqrt[3]{1^8} = 5 \quad ; \quad f(1) = 4 + \sqrt[3]{1^8} = 5$$

Estudiemos si la función es continua en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\forall a \in [-1, 1]: \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a+h) = \lim_{h \to 0} \left(4 + \sqrt[3]{(a+h)^8}\right) = 4 + \sqrt[3]{a^8}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a-h) = \lim_{h \to 0} \left(4 + \sqrt[3]{(a-h)^8}\right) = 4 + \sqrt[3]{a^8}$$

como $\forall a \in [-1, 1]$ $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a-h) = f(a)$, la función es contínua en $[-1, 1]$.

$$f(x) = 4 + \sqrt[3]{x^8} = 4 + x^{\frac{8}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}}$$

La función derivada f' está definida $\forall a \in [-1, 1]$.

Si la función es continua en $[-1, 1]$, derivable en $]-1, 1[$ y $f(-1) = f(1)$, se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\exists a \in]-1, 1[\;/\; f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{8}{3} a^{\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow a = 0$$

La curva de la función tiene en el punto de abscisa 0 una tangente horizontal.

12.6 **a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$**

b) Razonar si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

c) En caso afirmativo, calcular el $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ a que se refiere el teorema indicado.

(Univ. de León)

En $x = 1$ y $x = -1$, la función no está definida (no se puede dividir por 0), luego no es continua ni derivable en estos puntos.

$$\text{Como } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{para } x < 0 \quad (x \neq -1) \\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{" } x > 0 \quad (x \neq 1) \end{cases}$$

Por ser la función racional (excepto en los puntos -1 y 1 que no existe), sólo tendremos problema de continuidad y derivabilidad en $x = 0$, punto en el que cambia la forma de la función.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-(0-h)}{(0-h)^2-1} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h^2-1} = 0 \\ &\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(0+h)}{(0+h)^2-1} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h^2-1} = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{la función es contínua en } x = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &f'(0-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{h}{h^2-1} - 0}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-1}{h^2-1} = 1 \\ &f'(0+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{h}{h^2-1} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h^2-1} = -1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{la función no es derivable en } x = 0.$$

b) Si la función no es derivable en $x = 0 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, no se puede aplicar el teorema de Rolle en este intervalo.

12.7 **La función $f(x) = 1-\sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice este resultado el teorema de Rolle? ¿Por qué?**

(Univ. de Oviedo)

$$f(x) = 1 - x^{\frac{4}{5}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = -\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$$

No hay ningún valor de x que anula a f'(x).

De la expresión obtenida para f'(x) se deduce que sólo en $x = 0$ puede que la función no sea derivable:

$$\left.\begin{aligned} f'(0)^+ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} -\frac{4}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{0+h}} = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\frac{4}{5}(+\infty) = -\infty \\ f'(0)^- &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} -\frac{4}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{0-h}} = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{0^-}\right) = -\frac{4}{5}(-\infty) = +\infty \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{la función no es derivable en } x = 0.$$

Si la función no es derivable en $x = 0$, no se puede aplicar Rolle en el intervalo $[-1, 1]$.

12.8 **Se considera la aplicación $F: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ definida por**

$$F(x) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & x-1 \\ \operatorname{sen} x & 1-\cos x & 1 \end{vmatrix}$$

Demostrar que, independientemente del valor que se asigne a θ, existe siempre un $a \in]0, 1[$ tal que $F'(a) = 0$.

(Univ. de Murcia, 1991)

La función F es continua y derivable ya que si desarrollamos el determinante, F(x) es igual al producto y suma de expresiones de tipo polinómico en x, sen x y cos x.

$$F(0) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$F(1) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen} 1 & 1-\cos 1 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Si la función F es continua en el intervalo $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, derivable en el intervalo $]0, 1[$, y tal que $F(0) = F(1)$, según el teorema de Rolle, existe un $a \in]0, 1[$ tal que $F'(a) = 0$.

12.9 Sean f, g, h tres funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Demostrar que existe un $r \in]a, b[$ tal que

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(r) & g'(r) & h'(r) \end{vmatrix} = 0$$

¿Qué resultado se obtiene al tomar $h(x) = 1$ en $[a, b]$ y $g(x) = x$ en $[a, b]$? (Indicación: se podrá estudiar la función

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

en $[a, b]$ al desarrollar el determinante por los adjuntos de la última fila).

(Univ. de Murcia, 1991)

Por ser **f, g** y **h** funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, la función **F** definida por

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} = f(x)\cdot\begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix} - g(x)\cdot\begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix} + h(x)\cdot\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, por ser suma de funciones continuas y derivables en dichos intervalos.

Como además $F(a) = F(b) = 0$, ya que los determinantes resultantes tienen dos filas iguales, según el teorema de Rolle, existe un $r \in]a, b[$ tal que $F'(r) = 0$:

$$F'(x) = f'(x)\cdot\begin{vmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{vmatrix} - g'(x)\cdot\begin{vmatrix} f(a) & h(a) \\ f(b) & h(b) \end{vmatrix} + h'(x)\cdot\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}$$

$$F'(r) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(r) & g'(r) & h'(r) \end{vmatrix} = 0$$

Si $h(x) = 1$ y $g(x) = x$: $h'(x) = 0$; $g'(x) = 1 \Rightarrow F'(r) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(r) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$f'(r)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow f'(r)\cdot(a-b) - f(a) + f(b) = 0 \Rightarrow f'(r) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que es el teorema del valor medio aplicado a la función f en $[a, b]$.

12.10 Sea la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{para } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$$

determinar a y b para que la función f cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en $[2, 6]$.

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

La función ha de ser continua en el intervalo $[2, 6]$ y derivable en el intervalo $]2, 6[$.

Por ser polinómicas las dos formas de la función, sólo hay duda de la continuidad y derivabilidad en $x = 4$, valor en el que cambia la forma de la función.

Para que sea continua en $x = 4$, se tendrá que verificar:

$$\lim_{x \to 4^-} (ax - 3) = \lim_{x \to 4^+} (-x^2 + 10x - b) = f(4) \Rightarrow \quad 4a - 3 = 24 - b \qquad (1)$$

Para que sea derivable en $x = 4$, la derivada a la izquierda en $x = 4$, debe ser igual a la derivada a la derecha en $x = 4$:

$$f'(4)^- = \lim_{x \to 4^-} (a) = a \ ; \quad f'(4)^+ = \lim_{x \to 4^+} (-2x + 10) = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

llevando este valor a (1) se obtiene $\boxed{b = 19}$

12.11 Aplicar el teorema del valor medio a la función $f: [0, 1] \to R$, definida por

$$f(x) = x(x-2)$$

Hallar el valor de θ.

(Univ. de Granada)

La función f, definida por $f(x) = x^2 - 2x$ es una función polinómica, f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $]0, 1[$. Se cumplen las condiciones del teorema del valor medio.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \ ; \quad f'(x) = 2x - 2 \\ \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = f'[0 + \theta(1 - 0)] \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{(1-0) - 0}{1} = 2(\theta) - 2 \Rightarrow 1 = 2\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}}$$

12.12 Aplicando el teorema del valor medio, calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$.

(Univ. de Extremadura)

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

De estas expresiones se deduce que la función f es continua en el intervalo $[8, 9]$ y derivable en el intervalo $]8, 9[$. Según el teorema del valor medio: $\exists c \in]8, 9[$ tal que:

$$\frac{f(9) - f(8)}{9 - 8} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{8}}{1} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{9} = 2 + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} \approx 2 + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = 2 + \frac{1}{3} \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{12} = \boxed{2'08}$$

12.13 Demostrar que si a y b son números reales tales que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ entonces:

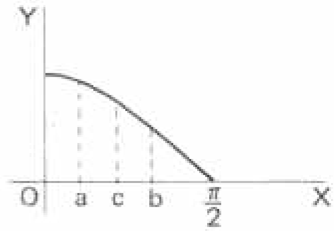
$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}$$

(Univ. de Murcia, 1991)

Si $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, la función $f: [a, b] \to R$ definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$ es continua y derivable.

Según el teorema del valor medio, si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo $]a, b[$, existe un punto c, $a < c < b$, tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} = \frac{1}{\cos^2 c} \qquad (1)$$



Hallemos brevemente la gráfica de

$$g(x) = \cos^2 x$$

en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$g(0) = 1$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $g'(x) = 2 \cos x\,(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} 2x < 0$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la curva es decreciente.

Si $0 < a < c < b < \frac{\pi}{2}$: $\cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b}$

llevando estas desigualdades a (1) resulta:

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}$$

12.14 **Si $x > 0$, demostar que:**

$$e^x > \frac{1}{1+x} \; ; \quad e^x > 1 + \log(1+x) \; ; \quad e^x > 1 + (1+x)\cdot\log(1+x)$$

(Univ. de Valladolid)

La función $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ es continua y derivable en todo intervalo de R_+. Aplicando el teorema del valor medio en $[0, x]$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\theta x), \quad (0 < \theta < 1) \\[2ex] f(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x} \; ; \quad f'(x) = e^x + \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{e^x - \frac{1}{1+x} - e^0 + \frac{1}{1+0}}{x - 0} = e^{\theta x} + \frac{1}{(1+\theta x^2} \Rightarrow$$

$$e^x - \frac{1}{1+x} = x\left(e^{\theta x} + \frac{1}{(1+\theta x)^2}\right), \text{ y como } x > 0,\ e^{\theta x} > 0,\ \frac{1}{(1+\theta x)^2} > 0:\ e^x - \frac{1}{1+x} > 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{e^x > \frac{1}{1+x}} \qquad \text{si } x > 0$$

La función $g: R_+ \to R$ definida por $g(x) = e^x - 1 - \log(1+x)$ es continua y derivable en todo intervalo de R_+. Aplicando el teorema del valor medio en $[0, x]$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\theta)\,x), \quad (0, < \theta < 1) \\[2ex] g'(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{e^x - 1 - \log(1+x) - [e^0 - 1 - \log(1+0)]}{x - 0} =$$

$$= e^{\theta x} - \frac{1}{1+\theta x} \Rightarrow e^x - 1 - \log(1+x) = x\left(e^{\theta x} - \frac{1}{1+\theta x}\right) > 0 \text{, ya que } x > 0 \text{ y } e^{\theta x} - \frac{1}{1+\theta x} > 0,$$

según hemos demostrado anteriormente. De donde:

$$\boxed{e^x > 1 + \log(1+x)} \qquad \text{si} \quad x > 0$$

La función $h: R_+ \to R$ definida por $h(x) = e^x - 1 - (1+x)\log(1+x)$ es continua y derivable en R_+. Aplicando el teorema del valor medio en $[0, x]$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(\theta x), \quad (0 < \theta < 1) \\ h'(x) = e^x - \log(1+x) - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e^x - 1 - (1+x)\log(1+x) - [e^0 - 1 - (1+0)\log(1+0)]}{x-0} =$$

$$= e^{\theta x} - \log(1+\theta x) - 1 \quad \Rightarrow$$

$$e^x - 1 - (1+x)\log(1+x) = x\left(e^{\theta x} - 1 - \log(1+\theta x)\right) > 0,$$

ya que $x > 0$ y $e^{\theta x} - 1 - \log(1+\theta x) > 0$, según la demostración anterior. De donde:

$$\boxed{e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)} \qquad \text{si} \quad x > 0$$

12.15 **¿Se puede aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones $f: R \to R$, y $g: R \to R$, definidas, respectivamente, por $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$?**

(Univ. de Córdoba)

El teorema de Cauchy dice: Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en $]a, b[$, verificándose además que $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$, existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Como $g'(x) = 3x^2$ se anula para $x = 0 \in]-1, 1[$, no se puede aplicar el teorema de Cauchy a las funciones f y g en el intervalo $[-1, 1]$.

12.16 **Sean** $\quad f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \quad$ y $\quad g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$

Comprobar que no existe ningún punto $t \in]0, 1[$ en el que se cumple:

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

y explicar la aparente contradicción con el teorema de Cauchy.

(Univ. de Madrid)

$$f(1) = 1\ ;\quad f(0) = 1\ ;\quad g(1) = -1\ ;\ g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{1-1}{-1-0} = 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 2x \\ g'(x) = 12x^2 - 6x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{12t^3 - 6t^2 - 2t}{12t^2 - 6t - 2} = \frac{2t(6t^2 - 3t - 1)}{2(6t^2 - 3t - 1)} \qquad (2)$$

$6t^2-3t-1=0 \Rightarrow t=\dfrac{3\pm\sqrt{9+24}}{12}=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{12} \Rightarrow$ si t es igual a alguno de estos valores $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ no existe (la división por 0 no existe), por tanto no puede verificarse la igualdad de las expresiones (1) y (2). Para cualquier valor de t que no anule el denominador, se puede simplificar la expresión (2) y nos quedaría:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)}=t\ ;\quad \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(t)}{g'(t)} \Rightarrow 0=t$$

y al no pertenecer 0 al intervalo $]0,1[$, no hay ningún valor de $t\in\,]0,1[$ que verifique la igualdad del enunciado.

$\dfrac{3+\sqrt{33}}{12}\in\,]0,1[$, hay un valor de $t\in\,]0,1[$ que anula a $g'(x)$, por tanto no se cumple una de as condiciones del teorema de Cauchy, y la igualdad de este teorema no tiene por qué cumplirse.

12.17 **Calcular** $\quad E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}$

(Univ. de Santiago)

Es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x}{1+3\cos 3x}=\frac{1-2}{1+3}=\boxed{\frac{-1}{4}}$$

12.18 **Calcular** $\quad E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot\operatorname{sen}x}{x^2}$

(Univ. de Santander)

Es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Considerando que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

El segundo límite es igual a 1, y en el primero aplicamos la regla de L'Hopital:

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\operatorname{sen}x)}{1}\cdot 1=0\cdot 1=\boxed{0}$$

12.19 **Calcular** $\quad E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}(a+x)}-e^{\operatorname{sen}a}}{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}a}$

(Univ. de Santiago)

Es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}(a+x)}\cdot\cos(a+x)}{\cos(a+x)}=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{sen}(a+x)}=\boxed{e^{\operatorname{sen}a}}$$

12.20 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$$

(Univ. de Valencia, 1991)
(Univ. de Valladolid)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x\,(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x\,(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1 + 1}{1} = \boxed{2}$$

12.21 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$$

(Univ. Islas Baleares, 1991)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Hopital:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x\,(1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^3 x}\,,$$

el primer límite vale 1 y el segundo es del tipo $\frac{0}{0}$, aplicándole L'Hopital:

$$E = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{-3\cos^2 x\,(-\operatorname{sen} x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\cos^2 x} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{3}}\,.$$

12.22 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

(Univ. de Extremadura)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital (dos veces):

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

12.23 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - \operatorname{sen} x + x - 1}$$

(Univ. de Islas Baleares)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital (dos veces):

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot (e^x - 1) + x e^x}{-\operatorname{sen} x - \cos x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1 \cdot e^x + x e^x}{-\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{e^0 + e^0 + 0 \cdot e^0}{-1 + 0} = \boxed{-2}$$

12.24 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - x - 1}{2x^2 - x^3}$$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital (dos veces):

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x - 1}{4x - 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} (\cos x)^2 + e^{\operatorname{sen} x}(-\operatorname{sen} x)}{4 - 6x} = \frac{e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 0}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

12.25 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \log(1+x)}{1 - \cos x}$$

(Univ. del País Vasco)

Es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \log(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\log(1+x) + x}{(1+x)\operatorname{sen} x}$$

como el límite de un producto es el producto de los límites:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\log(1+x) + x}{\operatorname{sen} x}$$

El primer límite vale 1 y el segundo es del tipo $\frac{0}{0}$, se le aplica L'Hopital:

$$E = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \log(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} + 1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

SEGUNDA SOLUCION: Considerando que $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \log(1+x)}{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \cdot \frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

El primer límite vale 1, y al segundo, que es del tipo $\frac{0}{0}$, se le aplica la regla de L'Hopital:

$$E = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

12.26 Calcular $$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$$

(Univ. del País Vasco)
(Univ. de León)

Sacando $e^{\operatorname{sen} x}$ factor común del numerador:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x}\left(e^{x - \operatorname{sen} x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} e^{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{x - \operatorname{sen} x} - 1}{x^3}$$

El primer límite es igual a $e^0 = 1$, y el segundo es del tipo $\frac{0}{0}$, aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{x - \operatorname{sen} x}(1 - \cos x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x - \operatorname{sen} x}}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

el primer límite vale $\frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}$ y el segundo es del tipo $\frac{0}{0}$, aplicando de nuevo la regla de L'Hopital:

$$E = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

12.27 Calcular $E = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x) - \pi x}{2x^2 \operatorname{tg}(\pi x)}$

(Univ. de Salamanca)

Es un límite de la forma $\frac{0}{0}$.

En un entorno de 0: $\operatorname{tg}(\pi x) \equiv \pi x$. Podemos sustituir en el denominador $\operatorname{tg}(\pi x)$ por (πx) porque $\operatorname{tg}(\pi x)$ está multiplicando, pero no podemos hacer dicha sustitución en el numerador porque $\operatorname{tg}(\pi x)$ está como sumando.

Aplicando la regla de L'Hopital, después de hacer la sustitución:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi x) - \pi x}{2\pi x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{[1 + \operatorname{tg}^2(\pi x)]\pi - \pi}{6\pi x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\pi x)}{6x^2}$$

sustituyendo $\operatorname{tg}(\pi x)$ por (πx): $E = \lim_{x \to 0} \frac{(\pi x)^2}{6x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi^2 x^2}{6x^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

12.28 Calcular $E = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(\log x)^3 + 2x}$

(Univ. de Madrid, 1991)

Es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3(\log x)^2 \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3(\log x)^2 + 2x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{6(\log x)\frac{1}{x} + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{6 \log x + 2x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{6 \cdot \frac{1}{x} + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

12.29 **Calcular los siguientes límites:** $E = \lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \log x$; $F = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \cos(x-1)}{(\log x)^2}$

(Univ. de Valencia)

$E = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{x}}$, es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = \boxed{0}$$

El segundo límite es del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$F = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2(\log x)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\log x} \overset{\text{(L'Hopital al 2° límite)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\cos(x-1)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

12.30 **Calcular** $E = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) \cdot \log(x-1)$

(Univ. de Santiago)

Es un límite del tipo $0 \cdot (-\infty)$. Nos quedará del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ escribiéndolo de la forma

$$E = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}$$

Aplicando la regla de L'Hopital: $E = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)^2}{-(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} -(x-1) = 0$

12.31 **Calcular** $E = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{tg} x \cdot \log x)$, $x > 0$

(Univ. de Salamanca)

Es un límite de tipo $0 \cdot \infty$, pero como $\operatorname{tg} x \cdot \log x = \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}$, nos queda un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{-x(1+\operatorname{tg}^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{-(1+\operatorname{tg}^2 x)} =$$

$$= 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

12.32 **Calcular** $E = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

(Univ. de Madrid)

Es un límite de la forma $(\infty - \infty)$. $E = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}$, que es un límite de la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen } x + x \cos x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = \left(\frac{0}{1+1-0}\right) = \boxed{0}$$

12.33 Calcular

$$E = \lim_{x\to 0} \left(\text{ctg } x - \frac{1}{x}\right)$$

(Univ. del País Vasco)

Es un límite del tipo $\infty - \infty$. Escrito de la forma:

$$E = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\text{sen } x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}$$

nos resulta un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital (dos veces):

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot \cos x - x \text{ sen } x - \cos x}{1 \cdot \text{sen } x + x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x \text{ sen } x}{\text{sen } x + x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 \cdot \text{sen } x - x \cos x}{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \text{ sen } x} =$$

$$\frac{-0-0}{1+1-0} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

12.34 Calcular

$$E = \lim_{x\to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)$$

(Univ. de Islas Baleares)
(Univ. de Santiago)

Es un límite del tipo $\infty - \infty$. Reduciendo a común denominador: $E = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e(x-1) - (e^x - e)}{(e^x - e)(x-1)}$

que es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x\to 1} \frac{e \cdot 1 - e^x}{e^x (x-1) + (e^x - e) \cdot 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e - e^x}{x e^x - e} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-e^x}{1 \cdot e^x + x \cdot e^x} = \frac{-e}{e+e} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

12.35 Hallar

$$E = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$$

(Univ. de Madrid, 1991)
(Univ. de Murcia)

Es un límite del tipo $(\infty - \infty)$. Reduciendo a común denominador: $E = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \log(1+x)}{x \cdot \log(1+x)}$

que es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{1 \cdot \log(1+x) + x \cdot \dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{(1+x)\cdot \log(1+x) + x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 \cdot \log(1+x) + (1+x)\dfrac{1}{1+x} + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{0+1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

12.36 Calcular $$E = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(Univ. de Castilla — La Mancha, 1991)

Es un límite del tipo 1^∞. $E = e^\lambda$, siendo $\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+2^x}{2} - 1\right)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x+2^x-2}{2x}$

que es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{3^x \log 3 + 2^x \log 2}{2} = \frac{3^0 \log 3 + 2^0 \log 2}{2} = \frac{\log 3 + \log 2}{2} = \frac{\log(3\cdot 2)}{2} = \log 6^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$E = e^{\log 6^{\frac{1}{2}}} = 6^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{6}}$$

12.37 Calcular $$E = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

(Univ. de Castilla — La Mancha, 1991)
(Univ. de León)

Es un límite del tipo 1^∞: $E = e^\lambda$, siendo $\lambda = \lim_{x\to 0} (\cos 2x - 1)\cdot\frac{3}{x^2} = 3\cdot\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$,

que es un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lambda = 3\cdot\lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{sen}\,2x}{2x} = -6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(2x)}{(2x)} = -6\cdot 1 = -6 \quad\Rightarrow\quad E = \boxed{e^{-6}}$$

12.38 Calcular $$E = \lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\,x}$$

(Univ. de Sevilla)

Es un límite del tipo 0^0.

La expresión $x^{\text{sen}\,x}$ solamente esta definida para $x > 0$, luego en el cálculo del límite consideraremos que $x \to 0$ siendo $x > 0$.

De la igualdad $A^B = e^{B\cdot\log A}$: $E = (e)^{\lim_{x\to 0} (\text{sen}\,x\cdot\log x)} = e^\lambda$

siendo $\lambda = \lim_{x\to 0} (\text{sen}\,x \cdot \log x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{\text{sen}\,x}}$, que es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{-x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{-\cos x} = 1\cdot 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad E = e^0 = \boxed{1}$$

12.39 **Calcular** $E = \lim_{x \to 0} (\text{sen } x)^x$

(Univ. de La Laguna–Tenerife)

Es un límite del tipo 0^0.

Considerando la igualdad $A^B = e^{B \cdot \log A}$: $E = \lim_{x \to 0} e^{x \cdot \log \text{sen } x} = e^{\lambda}$, $\lambda = \lim_{x \to 0} x \cdot \log \text{sen } x$

Este último límite, escribiéndolo de la forma $\lambda = \lim_{x \to 0} \dfrac{\log \text{sen } x}{\frac{1}{x}}$ es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L' Hopital:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-\cos x) \cdot \frac{x}{\text{sen } x} \cdot x$$

y como el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} (-\cos x) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} \cdot \lim_{x \to 0} x = (-1) \cdot 1 \cdot 0 = 0, \text{ de donde:} \qquad E = e^0 = \boxed{1}$$

12.40 **Calcular** $E = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\text{tg } x}$

(Univ. de Salamanca)

Es un límite del tipo ∞^0.

$$A^B = e^{B \cdot \log A} \Rightarrow E = \lim_{x \to 0} e^{\text{tg } x \cdot \log \frac{1}{x^2}} = e^{\lambda}$$

siendo $\lambda = \lim_{x \to 0} \text{tg } x \cdot \log \dfrac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \text{tg } x \cdot (\log 1 - 2 \log x) = \lim_{x \to 0} \text{tg } x\,(-2 \log x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{-2 \log x}{\frac{1}{\text{tg } x}}$

que es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-(1 + \text{tg}^2 x)}{\text{tg}^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \frac{\text{tg } x}{x} \cdot \text{tg } x = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \text{tg } x =$$

$$= \frac{2}{1+0} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow E = e^0 = \boxed{1}$$

12.41 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\log x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

estudiar la continuidad en el punto $x = 1$.

(Univ. de Córdoba)

La función será continua en el punto $x = 1$ si se verifican las igualdades:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1+h) = f(1)$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\frac{1}{(1-h)-1} - \frac{1}{\log(1-h)}\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(\frac{1}{-h} - \frac{1}{\log(1-h)}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\log(1-h)+h}{-h\log(1-h)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\frac{1}{1-h}+1}{-1\cdot\log(1-h) - h\cdot\frac{-1}{1-h}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-h}{-(1-h)\log(1-h)+h} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-1}{-(-1)\log(1-h) - (1-h)\frac{-1}{1-h} + 1} =$$

$$= \frac{-1}{0+1+1} = \frac{1}{2} \neq f(1) = 1 \Rightarrow \text{ la función no es continua en } x = 1.$$

12.42 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Calcular los valores de λ y A para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

(Univ. de Córdoba)

La función será continua en $x = 0$ si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y este límite es igual a $f(0) = A$.

El $\lim_{x\to 0} f(x)$ es del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda e^{\lambda x} - e^x - 1}{2x}$$

— si $\lambda \neq 2$: el numerador tiende a un número finito y el denominador tiende a 0, el límite será infinito.

— si $\lambda = 2$: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x} - e^x - 1}{2x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{4e^{2x} - e^x}{2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

La función es continua si $\boxed{\lambda = 2}$ y $\boxed{A = \frac{3}{2}}$

12.43 **Obtener los tres primeros términos del desarrollo de Taylor, para $x = \frac{\pi}{2}$, de**

$f(x) = x \cdot \cos x$

(Univ. de Santiago)

La forma de la fórmula de Taylor que se ha de aplicar es:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'''\left[\frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cdot\cos x \\ f'(x) &= 1\cdot\cos x + x(-\operatorname{sen} x) = \cos x - x\operatorname{sen} x \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x - 1\cdot\operatorname{sen} x - x\cos x = -2\operatorname{sen} x - x\cos x \\ f'''(x) &= -2\cos x - \cos x + x\operatorname{sen} x = -3\cos x + x\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1 = -\frac{\pi}{2} \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2\cdot 1 - \frac{\pi}{2}\cdot 0 = -2 \end{aligned}$$

$$x\cdot\cos x = 0 + \frac{-\frac{\pi}{2}}{1}(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{-2}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 +$$

$$+\frac{-3\cos[\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2})]+[\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2})]\operatorname{sen}[\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2})]}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3 =$$

$$= \boxed{-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})-(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{3\operatorname{sen}[\theta(x-\frac{\pi}{2})]+[\frac{\pi}{2}+\theta(x-\frac{\pi}{2})]\cos[\theta(x-\frac{\pi}{2})]}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3}$$

12.44 **Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo en potencias de x de**

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x}$$

(Univ. de Madrid)

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{n}} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} \qquad f'(0) = \frac{1}{n}$$

$$f''(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}} \qquad f''(0) = \frac{1-n}{n^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{n}\,\frac{1-n}{n}\,\frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}} \qquad f'''(0) = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}$$

$$f^{(4}(x) = \frac{1}{n}\,\frac{1-n}{n}\,\frac{1-2n}{n}\,\frac{1-3n}{n}(1+x)^{\frac{1-4n}{n}} \qquad f^{(4}(\theta x) = \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{n^4}(1+\theta x)^{\frac{1-4n}{n}}$$

$$\boxed{f(x) = 1+\frac{1}{n}x+\frac{1-n}{2!n^2}x^2+\frac{(1-n)(1-2n)}{3!n^3}x^3+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{4!n^4}(1+\theta x)^{\frac{1-4n}{n}}x^4 \;,\; (0<\theta<1)}$$

12.45 **Hallar el primer término no nulo del desarrollo de Taylor en el origen de la función f definida por**

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$$

Utilizando los cálculos realizados, determinar el comportamiento de la función f en un entorno del origen.

(Univ. de Cantabria)

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x) - \cos x \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{sen} x = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{sen} x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2(1+\operatorname{tg}^2 x) + 6\operatorname{tg}^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) + \cos x \qquad f'''(0) = 3$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \frac{3}{3!}x^3 + \cdots = \boxed{\frac{1}{2}x^3 + \cdots}$$

El comportamiento de la función f en un entorno de 0 es el mismo que el de la función g definida por $g(x) = \frac{1}{2}x^3$: $g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{3}{2}x^2 > 0$, $g''(x) = 3x$, $g'''(x) = 3$ $\Rightarrow$ la función es creciente en el origen y tiene en este punto un punto de inflexión con tangente horizontal.

12.46 **Mediante un desarrollo de Taylor de tercer grado para la función**

$$f(x) = \text{arc tg } x$$

calcular el valor aproximado de arc tg 0'1 y acotar el error cometido.

(Univ. de Murcia)

Emplearemos la fórmula:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4}(0+\theta x)}{4!}x^4, \text{ siendo } 0 < \theta < 1.$$

$f(x) = \text{arc tg tg } x$ | $f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$ | $f'(0) = 1$

$f''(x) = (-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$ | $f''(0 = 0$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot(2x)^2 + (-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2$ | $f'''(0) = -2$

$$f^{(4}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x^2)^{-4}(2x)^3 + (-1)(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot 2(2x)\cdot 2 + (-1)(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot 2x\cdot 2 =$$

$$= \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3} = \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$$ | $f^{(4}(\theta x) = \dfrac{-24(\theta x)^3 + 24(\theta x)}{[1+(\theta x)^2]^4}$

de donde:

$$f(x) = \text{arc tg } x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{-24(\theta x)^3 + 24(\theta x)}{4!\,[1+(\theta x)^2]^4}x^4 =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{-(\theta x)^3 + (\theta x)}{[1+(\theta x)^2]^4}x^4, \quad (0 < \theta < 1)$$

haciendo $\text{arc tg } x = x - \frac{1}{3}x^3$, se tiene que $\text{arc tg } 0'1 = 0'1 - \frac{1}{3}(0'1)^3 = 0'1 - \frac{0'001}{3} =$

$$= 0'1 - 0'000333 = 0'099667$$

con un error ϵ igual a $\epsilon = \dfrac{-(\theta\cdot 0'1)^3 + (\theta\cdot 0'1)}{[1+(\theta\cdot 0'1)^2]^4}(0'1)^4 = \dfrac{0'1\cdot\theta - 0'001\cdot\theta^3}{(1+0'01\cdot\theta^2)^4}\cdot 0'0001$

y considerando que una fracción aumenta su valor si se sustituye el numerador por una cantidad mayor, o bien se sutituye el denominador por una cantidad menor:

$$\epsilon < \frac{0'1\cdot\theta}{(1+0'01\cdot\theta^2)^4}0'0001 < \frac{0'1}{(1+0'01\cdot\theta^2)^4}0'0001 < \frac{0'1}{(1+0'01\cdot 0^2)^4}0'0001 < \frac{0'1}{1^4}0'0001 =$$

$$= 0'00001$$

El error cometido al hacer $\text{arc tg } 0'1 = 0'099667$ es menor que $0'00001$.

Se ha sustituido el numerador de la expresión que nos da el error por $0'1\cdot\theta > 0'1\cdot\theta - 0'001\cdot\theta^3$, después $0'1\cdot\theta$ por $0'1\cdot 1$, pues al ser $0 < \theta < 1$: $0'1\cdot\theta < 0'1\cdot 1 = 0'1$, y el denominador $(1+0'01\cdot\theta^2)^4$ por $(1+0'01\cdot 0^2)^4$ pues $0 < \theta < 1$ implica que $(1+0'01\cdot\theta^2)^4 > (1+0'01\cdot 0^2)^4 = 1$

12.47 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

se pide: 1º) Su polinomio de Mac–Laurin de grado 3.
2º) Usar el anterior polinomio para calcular de modo aproximado el valor de $\dfrac{1}{\sqrt{1'1}}$.
3º) ¿Qué se puede decir sobre el error cometido en la última aproximación?

(Univ. de Islas Baleares)

1º) Emplearemos la fórmula de Mac–Laurin, de grado 3 y con el término complementario:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4}(\theta x)}{4!}x^4, \quad \text{siendo } 0<\theta<1$$

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}-1} = -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(4}(x) = -\frac{15}{8}\left(-\frac{7}{2}\right)(1+x)^{-\frac{7}{2}-1} = \frac{105}{16}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$$

$$f(0) = (1+0)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}(1+0)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$f''(0) = \frac{3}{4}(1+0)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$f'''(0) = -\frac{15}{8}(1+0)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{8}$$

$$f^{(4}(\theta x) = \frac{105}{16}(1+\theta x)^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{16}\frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{3}{4}}{2!}x^2 + \frac{-\frac{15}{8}}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}\,\frac{105}{16}\,\frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{9}{2}}}x^4, \text{ siendo } 0<\theta<1.}$$

Su polinomio de grado 3 es: $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3}$

2º) Haciendo en la última expresión $x = 0,1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+0,1}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0,1 + \frac{3}{8}(0,1)^2 - \frac{5}{16}(0'1)^3 = 1 - \frac{0,1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 0,01 - \frac{5}{16}\cdot 0,001 =$$

$$= 1 - 0,05 + 0,00375 - 0,0003125 = \boxed{0,9534375}$$

3º) El error cometido en la anterior aproximación es:

$$e = \frac{1}{4!}\,\frac{105}{16}\,\frac{1}{(1+\theta\cdot 0,1)^{\frac{9}{2}}}(0,1)^4 = \frac{35}{128}\,\frac{0,0001}{(1+0,1\cdot\theta)^{\frac{9}{2}}}, \qquad 0<\theta<1.$$

$0<\theta<1 \Rightarrow 1+0,1\cdot\theta > 1+0,1\cdot 0 = 1$, al sustituir en el denominador de la expresión de e, $1+0,1\cdot\theta$ por 1, haremos el donominador más pequeño y el quebrado aumenta, o sea que:

$$e < \frac{35}{128}\,\frac{0,0001}{(1)^{\frac{9}{2}}} = \frac{35}{128}\cdot 0,0001 = 0,00003$$

12.48 **Justificar la relación:** $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$

para $x \in]-1, 1[$. ($\approx$ **significa aproximadamente igual)**

Calcular $\sqrt{1{,}5}$ **con ayuda de esta aproximación y estimar el error cometido.**

(Univ. de Murcia, 1991)

Apliquemos la fórmula de Mac–Laurin a la función $f:\ ]-1,1[\to R$ definida por $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \text{ , siendo } 0 < \theta < 1$$

$$'x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{\frac{3}{8}}{(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}x^3 \quad , \quad (0 < \theta < 1)$$

escindiendo del término complementario: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

Si hacemos $x = 0,5$: $\sqrt{1+0{,}5} = \sqrt{1{,}5} \approx 1 + \frac{0{,}5}{2} - \frac{(0{,}5)^2}{8} = 1 + 0'25 - \frac{0{,}25}{8} =$

$$= 1 + 0{,}25 - 0{,}03125 = \boxed{1{,}21875}$$

El error cometido es igual al término complementario, del que hemos prescindido al hallar la equivalencia, haciendo $x = 0{,}5$:

$$\epsilon = \left| \frac{1}{16}\,\frac{1}{(1+0{,}5\cdot\theta)^{5/2}}(0{,}5)^3 \right| \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

Si hacemos $\theta = 0$ en esta expresión:

$$\epsilon < \frac{1}{16}\,\frac{(0{,}5)^3}{1} = \frac{0{,}125}{16} = 0{,}0078 < 0{,}008$$

12.49 **Encontrar los máximos y mínimos relativos (si es que tiene) de**

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

(Univ. de Barcelona)

La función no está definida para $x = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3}\,; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^3} = 0, \quad \frac{x^3-2}{x^3} = 0, \quad x^3-2=0, \ x = \sqrt[3]{2}$$

$$f''(x) = -\frac{-2\cdot 3\cdot x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}\,; \quad f''(\sqrt[3]{2}) = \frac{6}{(\sqrt[3]{2})^4} > 0 \Rightarrow$$ la función tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{2}$ igual a $\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

12.50 **Hallar los máximos y mínimos de la función $f: R \to R$ definida por**

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

(Univ. de Valencia, 1991)
(Univ. de Castilla – La Mancha)

$$f'(x) = 4x^3 - 4x\,; \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0\,;\ 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0\,;\ x = 1, \ x = -1 \end{cases}$$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ la función tiene un máximo igual a $f(0) = 0$

$f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo igual a $f(1) = -1$

$f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ la función tiene un mínimo igual a $f(-1) = -1$

12.51 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f: R \to R$ definida por**

$$f(x) = e^{x^3+x^2+1}$$

(Univ. de Santiago)

$$f'(x) = e^{x^3+x^2+1}(3x^2+2x)\,; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = e^{x^3+x^2+1}(3x^2+2x)^2 + e^{x^3+x^2+1}(6x+2) = e^{x^3+x^2+1}\left((3x^2+2x)^2 + (6x+2)\right)$$

$f''(0) = e\cdot 2 > 0 \Rightarrow$ para $x = 0$ hay un mínimo $f(0) = e$

$f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{\frac{31}{27}}(-2) < 0 \Rightarrow$ para $x = -\dfrac{2}{3}$ hay un máximo: $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{\frac{31}{27}}$

2.52 **Decir si la gráfica de la función $f(x) = x^4e^x$ presenta máximo, mínimo o punto de inflexión el punto de abscisa $x = 0$.**

(Univ. de Alicante)

$$f(x) = x^4e^x \Rightarrow f'(x) = 4x^3e^x + x^4e^x = (4x^3 + x^4)e^x\,; \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (12x^2 + 4x^3)e^x + (4x^3 + x^4)e^x = (12x^2 + 8x^3 + x^4)e^x \quad ; \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (24x + 24x^2 + 4x^3)e^x + (12x^2 + 8x^3 + x^4)e^x = (24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4)e^x \ ; \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4}(x) = (24 + 72x + 36x^2 + 4x^3)e^x + (24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4)e^x \quad ; \qquad f^{(4}(0) = 24 > 0$$

la primera derivada no nula para $x = 0$ es de orden par y positiva, la función tiene un *mínimo* para $x = 0$.

12.53 **Estudiar los máximos y mínimos de la función $f: R \to R$ definida por**

$$f(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6)e^x$$

(Univ. de Madrid)

$$f'(x) = (3x^2 - 8x + 7)e^x + (x^3 - 4x^2 + 7x - 6)e^x = (x^3 - x^2 - x + 1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^3 - x^2 - x + 1)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$$

La suma de los coeficientes de la ecuación $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ es igual a 0, luego $x_1 = 1$ es raíz. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1, \ x_3 = -1$$

$$f(1) = (1 - 4 + 7 - 6)e^1 = -2e \quad ; \quad f(-1) = (-1 - 4 - 7 - 6)e^{-1} = \frac{-18}{e}$$

La ecuación $e^x = 0$ no tiene raices, pues una función exponencial siempre es mayor que cero.

$$f''(x) = (3x^2 - 2x - 1)e^x + (x^3 - x^2 - x + 1)e^x = (x^3 + 2x^2 - 3x)e^x$$

$f''(-1) = (-1 + 2 + 3)e^{-1} = \dfrac{4}{e} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f tiene un *mínimo* en $x = -1$.

$f''(1) = (1 + 2 - 3)e = 0$; hay que hallar $f'''(1)$

$$f'''(x) = (3x^2 + 4x - 3)e^x + (x^3 + 2x^2 - 3x)e^x = (x^3 + 5x^2 + x - 3)e^x \quad \Rightarrow$$

$f'''(1) = 4e > 0 \quad \Rightarrow \quad$ f tiene *un punto de inflexión, con tangente horizontal* en $x = 1$.

12.54 **a) Comprobar que la función f definida por**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 2x^3 + 3x - 26 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[-3, 3]$ y encontrar los valores máximo y mínimo en dicho intervalo.

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo abierto $]-3, 0[$.

(Univ. de Salamanca)

Las funciones polinómicas son continuas y derivables. Como las dos formas de la función dada son polinómicas, sólo existe duda de su continuidad en $x = 2$, punto donde cambia de forma.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [(2-h)^2 - (2-h) - 6] = -4 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [2(2+h)^3 + 3(2+h) - 26] = -4 \\ f(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la función es continua en } x = 2.$$

En $[-3, 2[$: $f'(x) = 2x - 1$, y en $]2, 3]$: $f'(x) = 6x^2 + 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [2(2-h) - 1] = 3 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f'(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [6(2+h)^2 + 3] = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no existe } f'(2)$$

de donde:

$$f'(x) = \left|\begin{array}{lll} 2x - 1 & \text{si} & -3 \leqslant x < 2 \\ 6x^2 + 3 & \text{si} & 2 < x \leqslant 3 \\ \text{no existe} & \text{si} & x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow f''(x) = \left|\begin{array}{lll} 2 & \text{si} & -3 \leqslant x < 2 \\ 12x & \text{si} & 2 < x \leqslant 3 \\ \text{no existe} & \text{si} & x = 2 \end{array}\right.$$

Sólo el valor $x = \frac{1}{2}$ anula a $f'(x)$, y como $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, existe un mínimo en $x = \frac{1}{2}$ igual a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$.

En el intervalo $\left[-3, \frac{1}{2}\right[$ la función es decreciente, ya que $f'(x) < 0$ en dicho intervalo. Para $x = -3$, la función tiene un máximo igual a $f(-3) = 3^2 - (-3) - 6 = 6$.

Tanto en el intervalo $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ como en el $]2, 3[$, $f'(x)$ es positiva, la función es creciente, lo que nos dice que en $x = 3$, la función tiene un máximo igual a $f(3) = 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 - 26 = 37$.

Resumen: *En el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ la función tiene un mínimo absoluto, en (3, 37) un máximo absoluto, y en (−3, 6) un máximo relativo.*

b) $f(-3) = 6$, $f(0) = -6$, y como en $[-3, 0]$ la función es continua, según el teorema de Bolzano, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $]-3, 0[$. Pero como en dicho intervalo $f'(x)$ es negativa, la función es decreciente, lo que implica que la ecuación $f(x) = 0$ sólo tiene una raíz en el intervalo $]-3, 0[$.

12.55 **Se desa construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.**

(Univ. de Salamanca)

Sea x el radio de la base, e y la altura del cilindro.

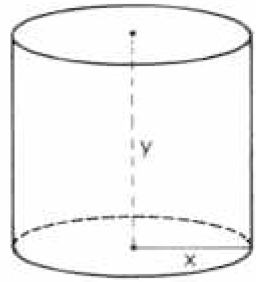
El área total es igual al área lateral $(2\pi x y)$ más el área de las dos bases $(2 \cdot \pi x^2)$:

$$2\pi x y + 2\pi x^2 = 150 \qquad (1)$$

El volumen del cilindro es igual al área de la base, πx^2, por la altua, y:

$$V = \pi x^2 y \qquad (2)$$

De (1): $\quad y = \dfrac{75 - \pi x^2}{\pi x}$,



llevando este valor a (2):

$$V = \pi x^2 \frac{75 - \pi x^2}{\pi x} = 75x - \pi x^3 \Rightarrow V' = 75 - 3\pi x^2 \;;\; V' = 0 \Rightarrow 75 - 3\pi x^2 = 0\;;$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx \boxed{2{,}82 \text{ cms.}} \quad ; \quad y = \frac{75 - \pi (2'82)^2}{\pi \cdot 2'82} \approx \boxed{5{,}65 \text{ cms.}}$$

$V'' = -6\pi x \Rightarrow V''\left(\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}\right) < 0 \Rightarrow$ los valores hallados corresponden a un máximo.

12.56 Demostrar que la ecuación

$$x^2 = x \cdot \text{sen}\, x + \cos x$$

tiene exactamente dos raices.

(Univ. de Valladolid)

Consideremos la función f definida por $f(x) = x^2 - x \,\text{sen}\, x - \cos x$.

Como las funciones: polinómica, $x \longmapsto \text{sen}\, x$ y $x \longmapsto \cos x$ son continuas y derivables en $\mathbf{R}$, la función f será continua y derivable en todo intervalo de $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = 2x - 1 \cdot \text{sen}\, x - x \cdot \cos x - (-\text{sen}\, x) = x(2 - \cos x)\;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 - \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$x = 0$

$2 - \cos x = 0$, no tiene solución, pues al ser $-1 \leq \cos x \leq 1$, $2 - \cos x > 0$

$$f''(x) = 1 \cdot (2 - \cos x) + x \cdot \text{sen}\, x = 2 - \cos x + x\, \text{sen}\, x \Rightarrow f''(0) = 2 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow$$

la función f tiene un mínimo para $x = 0$, igual a $f(0) = -1$.

Como $2 - \cos x > 0$ para todo valor real de x, $f'(x) = x(2 - \cos x)$ tiene el mismo signo de x.

El cuadro de variación de la función f será:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Este cuadro nos indica que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una sola raíz en el intervalo $]-\infty, 0]$ y otra en el intervalo $[0, +\infty[$, lo que equivale a decir que la ecuación del enunciado tiene exactamente dos raices.

12.57 Calcular la ecuación de la tangente a la curva

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 4$$

en su punto de inflexión.

(Univ. de Santiago)
(Univ. de Sevilla)

El valor de la abscisa del punto de inflexión es el que anula la segunda derivada (y no anula la tercera derivada):

$$y' = 6x^2 - 12x \; ; \quad y'' = 12x - 12 \; ; \quad y''' = 12$$

$y'' = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$, como para $x = 1$, y vale: $2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 = 0$, el punto de inflexión es el $(1, 0)$.

Para $x = 1$, y' vale: $6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -6$, de donde la ecuación de la tangente es

$$y - 0 = -6(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -6x + 6}$$

12.58 **Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva**

$$y = 4x^3 - 2x^2 - 10$$

en los puntos de inflexión y de máximo o mínimo relativo.

(Univ. de Córdoba)

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x \; ; \quad f''(x) = 24x - 4 \; ; \quad f'''(x) = 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$f''(0) = -4 < 0$, la curva tiene en el punto de abscisa 0 un máximo igual a $f(0) = -10$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 4 > 0$, la curva tiene en el punto de abscisa $\frac{1}{3}$, un mínimo igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{27} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 10 = -\frac{272}{27}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 24x - 4 = 0 \; ; \quad x = \frac{1}{6} \; ; \quad f'''\left(\frac{1}{6}\right) = 24 \neq 0. \Rightarrow$ la curva tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $\frac{1}{6}$.

Si existe $f'(a)$, la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

de donde:

– tangente en el punto $(0, -10)$: $\quad y - (-10) = 0 \cdot (x - 0) \; ; \quad \boxed{y + 10 = 0}$

– " " " " $\left(\frac{1}{3}, -\frac{272}{2}\right)$: $\quad y - \left(-\frac{272}{27}\right) = 0 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\quad \boxed{y + \frac{272}{27} = 0}$

– " " " " $\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$: $\quad y - \left(-\frac{271}{27}\right) = \left(12 \cdot \frac{1}{36} - 4 \cdot \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$;

$$\boxed{y + \frac{271}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)}$$

12.59 **Hallar el valor de b y m para que la curva**

$$y = x^3 + bx^2 + mx + 1$$

tenga en el punto (0, 1) una inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

(Univ. de Alicante, 1991)

$$y' = 3x^2 + 2bx + m \quad ; \qquad y'' = 6x + 2b \quad ; \quad y''' = 6$$

— la curva tiene en el punto $(0, 1)$ una inflexión: $f''(0) = 0 \Rightarrow 6\cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

— la pendiente de la tangente en $(0, 1)$ vale 1: $f'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 3\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + m \Rightarrow \boxed{m = 1}$

12.60 **Sea** $$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$$

Hallar a y b de manera que la curva $y = f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión con tangente horizontal.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \qquad f''(x) = 6x + 2a \ ; \quad f'''(x) = 6$$

Si la curva $y = f(x)$ tiene para $x = 1$ un punto de inflexión, $f''(1) = 0$; y si para $x = 1$ tiene un punto de tangente horizontal, $f'(1) = 0$, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} 6\cdot 1 + 2a = 0 \\ 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \boxed{a = -3} \\ 3 + 2(-3) + b = 0 \ ; \quad \boxed{b = 3} \end{array}$$

12.61 **Dada la curva** $$y = \frac{2}{x} + \log(x^2)$$

a) **Buscar el punto M de la curva en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.**
b) **Buscar el punto de inflexión I.**
c) **Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos M, I y la intersección J de las tangentes a la curva en los puntos M e I.**

(Univ. de Barcelona)

a) Si a es la abscisa del punto M, se verificará que $f'(a) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{(-2+2x)}{x^2} \ ; \ f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{-2+2a}{a^2} = 0 \ ; \ -2+2a = 0 \ ; \ a = 1 \ ;$$

$$f(1) = \frac{2}{1} + \log 1^2 = 2 + 0 = 2 \ \Rightarrow \ \text{M es el punto } (1, 2).$$

b) $$f''(x) = \frac{2\cdot x^2 - (-2+2x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{4-2x}{x^3} \ ; \quad f'''(x) = \frac{-2\cdot x^3 - (4-2x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{4x-12}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-2x}{x^3} = 0 \ ; \quad 4 - 2x = 0 \ ; \quad x = 2 \ ; \quad f(2) = \frac{2}{2} + \log 2^2 = 1 + 2\log 2$$

$$f'''(2) = \frac{4\cdot 2 - 12}{2^4} \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{el punto I es el } (2, 1 + 2\log 2)$$

c) — ecuación de la tangente a la curva en el punto $M(1, 2)$:

$$y - 2 = f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 2 = 0\cdot(x-1) \ ; \quad y - 2 = 0 \qquad (1)$$

— ecuación de la tangente a la curva en el punto $I(2, 1 + 2\log 2)$:

$$y - (1 + 2\log 2) = f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y - 1 - 2\log 2 = \frac{1}{2}(x-2) \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) obtendremos las coordenadas del punto J:

$$\left.\begin{array}{l} y-2=0 \\ y-1-2\log 2=\dfrac{1}{2}(x-2) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} y=2 \\ 2-1-2\log 2=\dfrac{1}{2}(x-2) \ ; \quad x=4-4\log 2 \end{array} \quad \Rightarrow$$

el punto J es el $(4-4\log 2, 2)$.

Como el área del triangulo ABC tal que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ es igual a:

$$\text{valor absoluto de } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

el área del triángulo MIJ es:

$$\text{valor absoluto de } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1+2\log 2 & 1 \\ 4-4\log 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{valor absoluto de } \frac{1}{2}\Big((1+2\log 2+4+8-8\log 2)-(4-4\log 2)(1+2\log 2)-4-2\Big)=$$

$$= \text{valor absoluto de } \frac{3-10\log 2+8(\log 2)^2}{2}$$

12.62 **Sea $f: [a, b] \to R$ una función n veces derivable tal que $f^{(n}$ sea continua. Probar que si $x_o \in]a, b[$, entonces:**

$$E=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)-\dfrac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)-\dots-\dfrac{f^{(n-1}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1}-\dfrac{f^{(n}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n}{(x-x_o)^n}=0$$

(Univ. de Murcia)

Por ser la función f n veces derivable, por la fórmula de Taylor:

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+\dots+\frac{f^{(n-1}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1}+\frac{f^{(n}[x_o+\theta(x-x_o)]}{n!}(x-x_o)^n, \quad 0<\theta<1$$

de donde:

$$E=\lim_{x\to x_o}\frac{\dfrac{f^{(n}[x_o+\theta(x-x_o)]}{n!}-\dfrac{f^{(n}(x_o)}{n!}}{(x-x_o)^n}(x-x_o)^n=\lim_{x\to x_o}\Big(f^{(n}[x_o+\theta(x-x_o)]-f^{(n}(x_o)\Big)=$$

por ser $f^{(n}$ continua en x_o:

$$=f^{(n}(x_o)-f^{(n}(x_o)=0$$

CAPITULO 13

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES DADAS EN FORMA EXPLICITA

REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION DADA EN FORMA EXPLICITA.

Para dibujar la curva (C) de la función $f:\ x \to y = f(x)$ estudiaremos sucesivamente los siguientes puntos:

1º) CAMPO DE EXISTENCIA O CONJUNTO DE DEFINICION.

Es el subconjunto $D \subset \mathbf{R}$, formado por los valores reales de x para los que y es real.

☆ $y = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ no está definida para los valores de x que anulan el denominador.

Sea f la función definida por $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \Rightarrow x = \pm 2$; $D = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$; $y = \dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x+2} \Rightarrow$ la curva de f es la curva de la función: $\mathbf{R} - \{-2, 2\} \to \mathbf{R}$ definida por $y = \dfrac{1}{x+2}$

☆ $y = \sqrt[2n]{g(x)}$ está definida sólamente para los valores de x que hacen $g(x) \geqslant 0$.

Sea $y = \sqrt{-x^2-x+2}$; $-x^2-x+2=0$, x^2+x-2; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$; $y = \sqrt{-(x-1)(x+2)}$

$D = [-2, 1]$

$-(x-1)(x+2)$	$-$	$+$	$-$
x	-2	1	

Si $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}$; $D =]-2, 1[$

☆ $y = \log_a g(x)$ está definida sólamente para los valores de x que hacen $g(x) > 0$.

Sea $y = \log\sqrt{-x^2-x+2}$; $D =]-2, 1[$

☆ $y = \text{arc sen}\, g(x)$
☆ $y = \text{arc cos}\, g(x)$
está definida sólamente para los valores de x que hacen $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

Sea $y = \text{arc sen}\,(x+2)$; $-1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} -1 \leqslant x+2 ; & x \geqslant -3 \\ x+2 \leqslant 1 ; & x \leqslant -1 \end{array} \right. \Rightarrow D = [-3, -1]$

2º) SIMETRIAS Y PERIODICIDAD

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Si D es el conjunto de definición, para estudiar f es suficiente hacerlo en el conjunto $E = D \cap [0, +\infty[$. Dibujada la curva correspondiente a E, se dibuja su simétrica respecto del origen de coordenadas y tendremos toda la curva.

Sea $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$; $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-3x}{x^2+1} = -\dfrac{3x}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas. Sólo hay que estudiarla en $\mathbf{R}_+$.

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY.

Si D es el conjunto de definición, basta hacer el estudio en el conjunto $E = D \cap [0, +\infty[$.

Sea $y = \dfrac{x^2-1}{x^4+1}$; $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^4+1} = \dfrac{x^2-1}{x^4+1} = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY. Sólo hay que estudiarla en $\mathbf{R}^+$.

Para comprobar que una curva no tiene simetrías respecto del origen ni respecto del eje OY (la función no es impar ni par), basta ver que, siendo a un punto cualquiera de D, se tiene que $f(-a) \neq f(a)$ y $f(-a) \neq -f(a)$.

Sea $y = x^2 + 3x$; $f(1) = 4$, $f(-1) = -2 \Rightarrow$ la curva no tiene simetrías respecto del punto $(0,0)$, ni respecto del eje OY.

Si la función es periódica, es decir, si $\forall x \in D$ existe un número real T no nulo tal que: $f(x+T) = f(x)$, basta estudiar la curva en el conjunto $E = D \cap [a, a+T]$, donde $a \in D$, y trasladando la curva obtenida a los intervalos $[a + kT, a + (k+1)T]$, $k \in \mathbf{Z}^*$, tendremos la curva pedida.

Las funciones $x \mapsto \operatorname{sen}(ax+b)$ y $x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$, tienen por periodo $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$, y la función $x \mapsto \operatorname{tg}(ax+b)$, $a \neq 0$, tiene por periodo $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

Si $\mathbf{h}$ y $\mathbf{g}$ son dos funciones periódicas de periodos respectivos T_1 y T_2, la función $\mathbf{f} = \mathbf{h} + \mathbf{g}$ es una función periódica, cuyo periodo se obtiene del siguiente modo:

Se escribe $\dfrac{T_1}{T_2}$ como una fracción irreducible $\dfrac{a}{b}$: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{a}{b}$, $T = aT_2 = bT_1$ es el periodo de $\mathbf{f}$.

El mismo método se sigue si $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$. El periodo será $T = aT_2 = bT_1$ o un divisor de T.

La función $x \mapsto \operatorname{sen} 2x$ tiene por periodo $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ y la función $x \mapsto \cos 3x$ tiene por periodo $T_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

La función $x \mapsto \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ es periódica, su periodo se obtiene así:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 2T_1 = 3T_2 = 2\pi$$

3º) CORTE CON LOS EJES.

$x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, las abscisas de los puntos de corte son las raíces de esta ecuación.

$y = \sqrt[n]{g(x)}$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$	$y = \operatorname{tg} g(x)$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = k\pi$
$y = \log g(x)$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 1$	$y = \operatorname{arc\,sen} g(x)$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$
$y = \operatorname{sen} g(x)$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = k\pi$	$y = \operatorname{arc\,cos} g(x)$,	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 1$
$y = \cos g(x)$;	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$	$y = \operatorname{arc\,tg} g(x)$,	$y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

4º) ASINTOTAS.

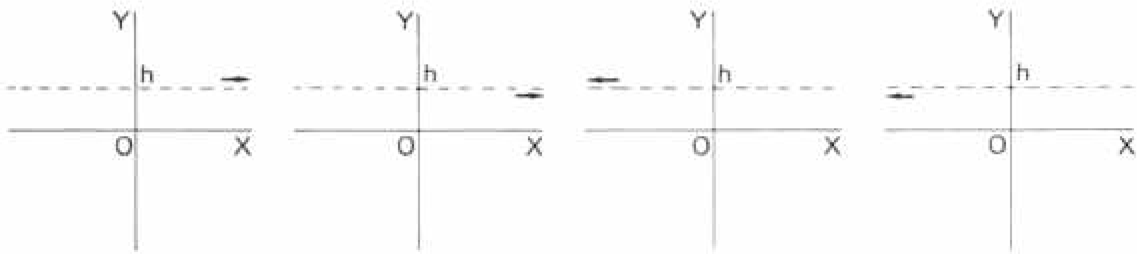
Se dice que una curva tiene ramas infinitas si existen puntos de la curva cuya distancia al origen de coordenadas es mayor que cualquier número prefijado. Si una curva tiene ramas infinitas, la recta (si existe) a la cual se aproxima la curva cada vez más sin llegar a tocarla, se llama *asíntota*. (Incorrectamente se dice que la asíntota es la tangente a la curva en su punto del infinito). Si la curva no tiene asíntotas, se dice que la curva tiene una *rama parabólica*.

Asíntotas horizontales o paralelas al eje OX. Son de la forma:

$$\boxed{y = h}\ , \text{siendo } h = \lim_{x\to\infty} f(x)\ , \quad (h \in \mathbf{R})$$

La curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$ tiene una asíntota horizontal, la recta de ecuación $y = 3$, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3$.

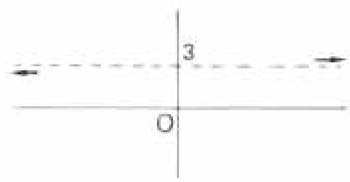
Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal $y = h$, bastará hallar el signo de $f(x) - h$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, si $f(x) - h > 0$ la curva estará por encima de la asíntota y si $f(x) - h < 0$ la curva estará por debajo de la asíntota.



$\underset{x\to+\infty}{f(x) - h > 0}$ $\quad$ $\underset{x\to+\infty}{f(x) - h < 0}$ $\quad$ $\underset{x\to-\infty}{f(x) - h > 0}$ $\quad$ $\underset{x\to-\infty}{f(x) - h < 0}$

Veamos la posición de la curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$ respecto de la asíntota $y = 3$:

$$f(x) - 3 = \frac{3x}{x-1} - 3 = \frac{3x - 3x + 3}{x-1} = \frac{3}{x-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } x \to +\infty \\ < 0 & \text{" } x \to -\infty \end{cases}$$



En ciertas funciones, por ejemplo en las exponenciales, hay que hallar por separado el límite de $f(x)$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, ya que ambos límites pueden ser distintos:

Sea $y = x \cdot e^{-x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal por la derec

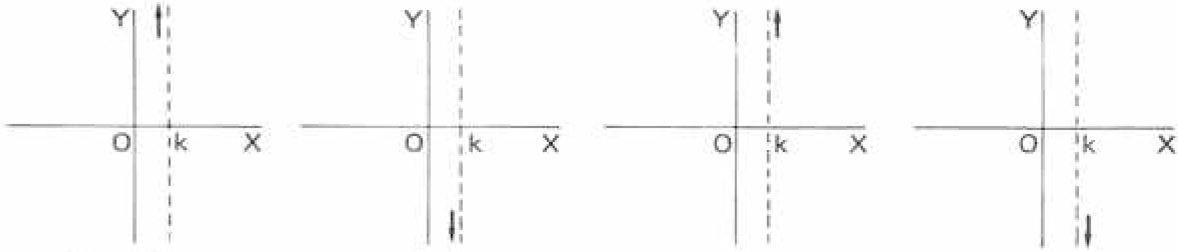
$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty) \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal por la izquierda.

Asíntotas verticales o paralelas al eje OY: Son de la forma $\boxed{x = k}$ siendo k los valores finitos x que hacen y infintito.

Si $y = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ ó $y = \sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$, k son las raices de $h(x) = 0$.

Si $y = \log \dfrac{g(x)}{h(x)}$, k son las raices de $g(x) = 0$, y las raices de $h(x) = 0$.

Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota vertical $y = k$, viendo el signo de $f(k - \epsilon)$ y $f(k + \epsilon)$, cuando ϵ tiende a 0.

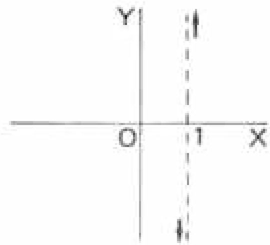


$f(k-\epsilon) > 0$ $\qquad$ $f(k-\epsilon) < 0$ $\qquad$ $f(k+\epsilon) > 0$ $\qquad$ $f(k+\epsilon) < 0$

Sea la curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$, $x - 1 = 0 \implies x = 1$ es asíntota vertical.

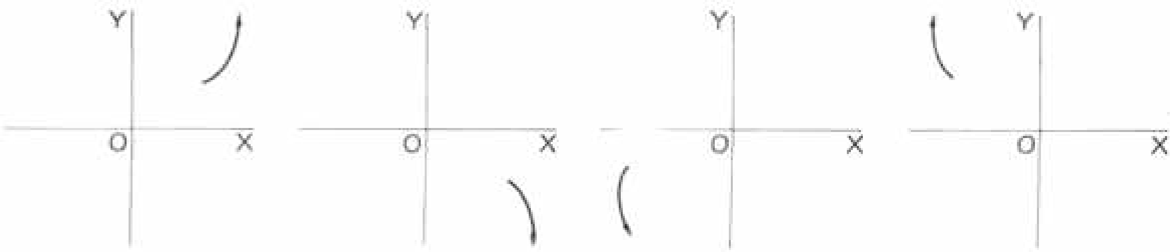
$f(1-\epsilon) = \dfrac{3(1-\epsilon)}{(1-\epsilon)-1} = \dfrac{3(1-\epsilon)}{-\epsilon} < 0 \implies$ la curva se acerca a la asíntota por debajo a la izquierda de $x = 1$.

$f(1+\epsilon) = \dfrac{3(1+\epsilon)}{(1+\epsilon)-1} = \dfrac{3(1+\epsilon)}{\epsilon} > 0 \implies$ la curva se acerca a la asíntota por arriba a la derecha de $x = 1$.



Asíntotas generales y ramas parabólicas. Se estudian solamente si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

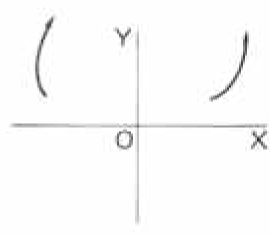
— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección del eje OY*.



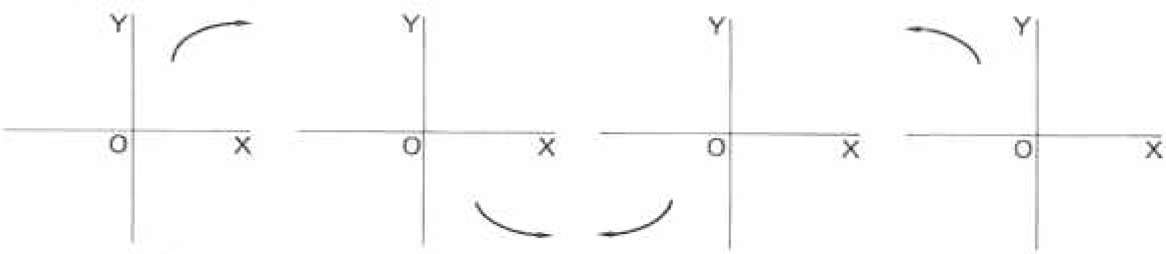
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

Sea $y = \dfrac{x^3}{x-1}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$



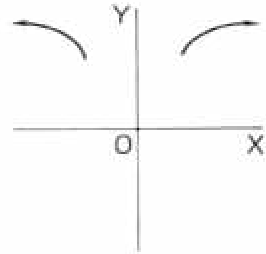
— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección del eje OX.*



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^-$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^-$

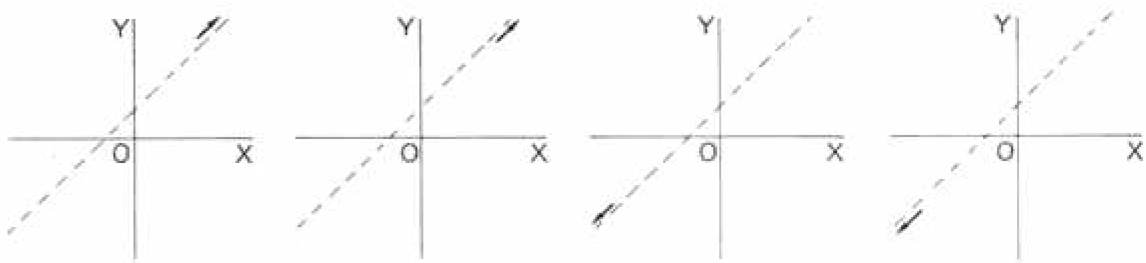
Sea $y = \log(x^2+1)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2+1)}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0^+$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0^-$$



— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad y \quad \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b}$, la curva tiene la asíntota $\boxed{y = mx + b}$

La posición de la curva respecto de la asíntota se estudia hallando el signo, para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, de $f(x) - mx - b$:



$\underset{x\to+\infty}{f(x)-mx-b > 0}$ $\quad$ $\underset{x\to+\infty}{f(x)-mx-b < 0}$ $\quad$ $\underset{x\to-\infty}{f(x)-mx-b > 0}$ $\quad$ $\underset{x\to-\infty}{f(x)-mx-b < 0}$

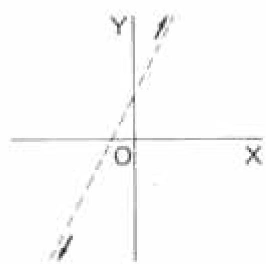
Sea $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-x} = 2$; $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-2x^2+2x}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2x+2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - mx - b = \frac{2x^2}{x-1} - 2x - 2 = \frac{2x^2-2x^2+2x-2x+2}{x-1} =$$

$$= \frac{2}{x-1} \left| \begin{array}{l} > 0 \text{ si } x \to +\infty \\ < 0 \text{ si } x \to -\infty \end{array} \right.$$



Los punto de corte de la curva y de la asíntota se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ y = mx + b \end{array} \right|$$

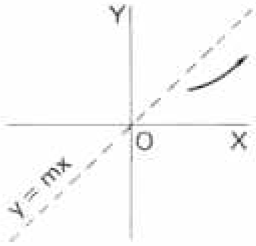
En el ejemplo anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{2x^2}{x-1} \\ y = 2x+2 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{2x^2}{x-1} = 2x+2 ;\ 2x^2 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 \Rightarrow 0 = -2 \text{ (absurdo)} \Rightarrow$$

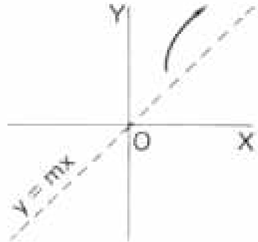
la curva no corta a la asíntota.

— si $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \infty}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección de la recta* $y = mx$.

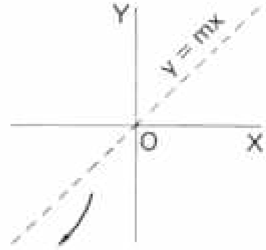
El signo de $f''(x)$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ nos dará la convexidad o concavidad de la curva en la rama parabólica, lo que nos facilitará su dibujo.



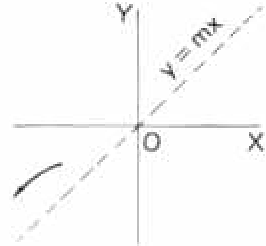
$\underset{x\to+\infty}{f''(x) > 0}$



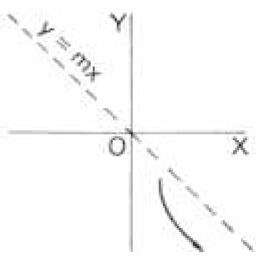
$\underset{x\to+\infty}{f''(x) < 0}$



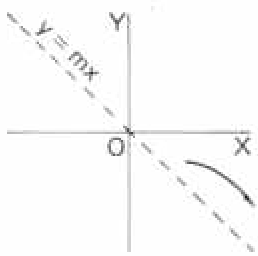
$\underset{x\to-\infty}{f''(x) > 0}$



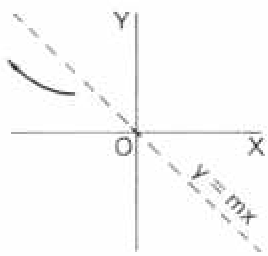
$\underset{x\to-\infty}{f''(x) < 0}$



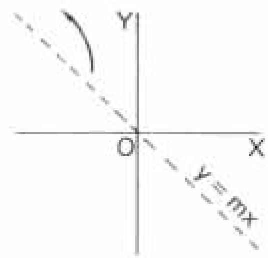
$\underset{x\to+\infty}{f''(x) > 0}$



$\underset{x\to+\infty}{f''(x) < 0}$



$\underset{x\to-\infty}{f''(x) > 0}$



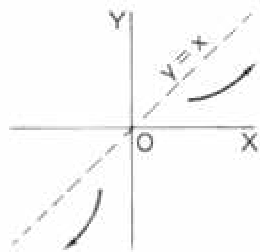
$\underset{x\to-\infty}{f''(x) < 0}$

Sea $y = x + \frac{3}{x} - \log x^2$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{\log x^2}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = 1 - 0 = 1$

$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [x + \frac{3}{x} - \log x^2 - x] = \lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x} - \log x^2) = 0 - \infty = -\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2x}{x^2} = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$; $f''(x) = -\frac{-6x}{x^4} - \frac{-2}{x^2} = \frac{6+2x}{x^3}$

$f''(x) = \frac{6+2x}{x^3} > 0$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ $\Rightarrow$



las ramas parabólicas son convexas.

MAXIMOS Y MINIMOS. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

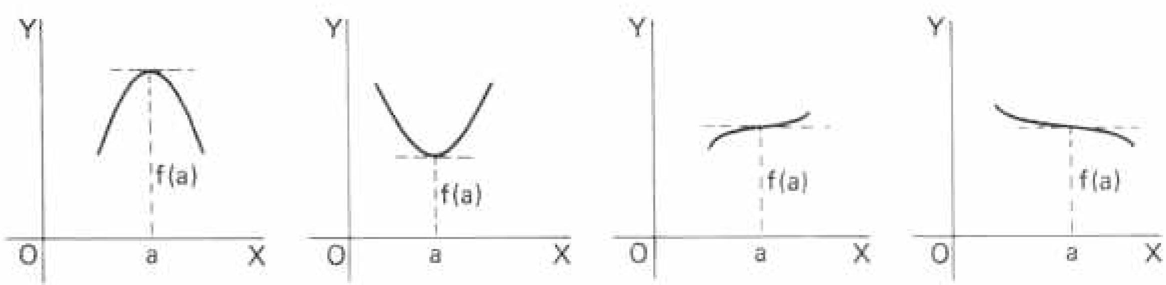
Para hallar los máximos y mínimos se obtienen las raices de la ecuación $f'(x) = 0$, y los puntos en los que no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles puntos donde la función puede tener máximos y mínimos. Dichos puntos son también los posibles extremos de los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

Si a es una raiz de $f'(x) = 0$, en el punto $(a, f(a))$ la curva tendrá un máximo o mínimo, o un punto de inflexión con tangente horizontal según sea par o impar la primera derivada no nula de orden ≥ 2, es decir:

$$f'(a)=0\begin{cases} f''(a)<0 \ \text{máximo} \\ f''(a)>0 \ \text{mínimo} \\ f''(a)=0 \begin{cases} f'''(a)\neq 0 \quad \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ f'''(a)=0 \begin{cases} f^{(4}(a)<0 \quad \text{máximo} \\ f^{(4}(a)>0 \quad \text{mínimo} \\ f^{(4}(a)=0 \begin{cases} f^{(5}(a)\neq 0 \quad \text{punto inflexión con tg. hor.} \\ f^{(5}(a)=0\ \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Si $f''(a)$ no existe, o su cálculo es complicado, se estudian los máximos y mínimos con la primera derivada, considerando la propiedad de que si $f'(x)$ es positiva en un punto la función es creciente en ese punto, y si es negativa es decreciente:

$$f'(a)=0\begin{cases} \left.\begin{matrix} f'(a-h)>0 \\ f'(a+h)<0 \end{matrix}\right| \ \text{máximo} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h)<0 \\ f'(a+h)>0 \end{matrix}\right| \ \text{mínimo} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h)>0 \\ f'(a+h)>0 \end{matrix}\right| \ \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h)<0 \\ f'(a+h)<0 \end{matrix}\right| \ \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \end{cases}$$



$f'(a-h)>0$	$f'(a-h)<0$	$f'(a-h)>0$	$f'(a-h)<0$
$f'(a+h)<0$	$f'(a+h)>0$	$f'(a+h)>0$	$f'(a+h)<0$

Para el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento véase el principio de la parte teórica del capítulo 11.

PUNTOS DE INFLEXION. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

(Véase la parte teórica de los capítulos 11 y 12).

PROBLEMAS

13.1 **Representar la función** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

(Univ. de Santiago)

Campo de definición: La función no está definida para $x = -1$ (no se puede dividir por 0). El campo de definición es $R - \{-1\}$.

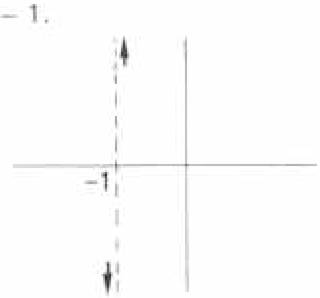
Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x+1} = \dfrac{x^2}{-x+1} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. La curva no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto al origen de coordenadas.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$. $\qquad y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0$; $x = 0$.

Asíntotas horizontales: No hay, puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$.

Asíntotas verticales: La asíntota vertical es la recta de ecuación $x = -1$.

Estudio de la posición de la curva respecto de la asíntota $x = -1$:



$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^2}{(1-h)-1} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^2}{(1+h)-1} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^2}{h} = +\infty$$

Asíntotas generales u oblícuas:

$$y = mx + b \quad \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\[2ex] b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \end{cases}$$

La asíntota general es la recta de ecuación $y = x - 1$.

Estudio de la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$y_{curva} - y_{asíntota} = \frac{x^2}{x+1} - (x-1) = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

para $x \to +\infty$: $\frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow$ la curva queda por encima de la asíntota.

" $x \to -\infty$: $\frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow$ la curva queda por debajo de la asíntota.

Máximos y mínimos: $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$;

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0$; $x^2 + 2x = 0$; $x(x+2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;

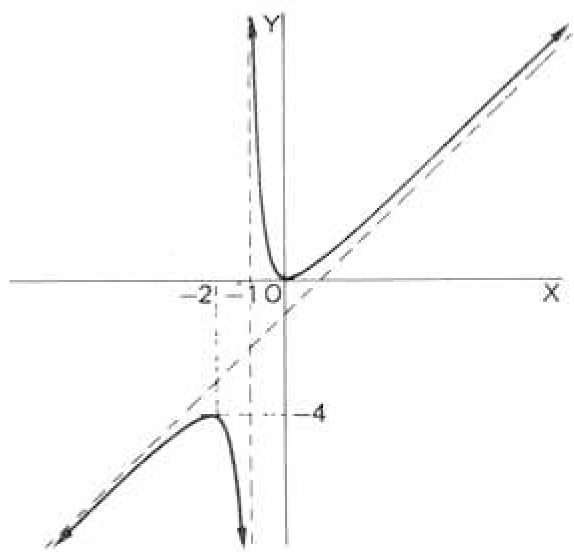
$f(0) = 0$, $f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$.

$f''(0) = \frac{2}{1} > 0 \Rightarrow$ la función presenta un mínimo para $x = 0$.

$f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = \frac{2}{-1} < 0 \Rightarrow$ la función presenta un máximo para $x = -2$.

Puntos de inflexión: $f''(C) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^3} = 0$, no hay nigùn valor de x que anule la segunda derivada. No hay punto de inflexión.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



13.2 **Representar la función** $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

determinando sus simetrías, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

(Univ. de Salamanca)

Campo de existencia: La función no está definica para $x = 1$ y $x = -1$, valores de x para los que se anula el denominador. El campo de existencia es: $R - \{-1, 1\}$.

Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{1-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0$, $x = 0$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

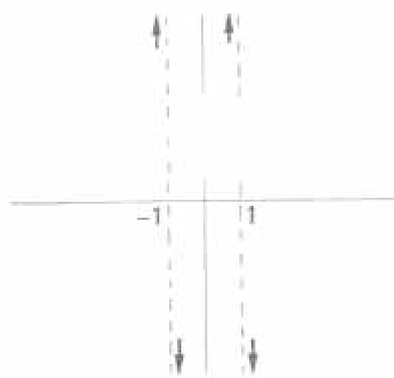
Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen la y infinita. En las funciones racionales se obtienen haciendo cero el denominador:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \; ; \quad \underline{x = 1} , \quad \underline{x = -1}$$

Estudiemos la posición de la curva $y = \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)}$ respecto de estas asíntotas:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^3}{(1-1+h)(1+1-h)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^3}{h(2-h)} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^3}{(1-1-h)(1+1+h)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^3}{-h(2+h)} = -\infty$$



De la simetría de la curva respecto del origen se deduce la posición de la curva respecto de la asíntota $x = -1$.

Asíntotas oblicuas:

$$y = mx + b \left| \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1-x^2} = 0 \end{array} \right.$$

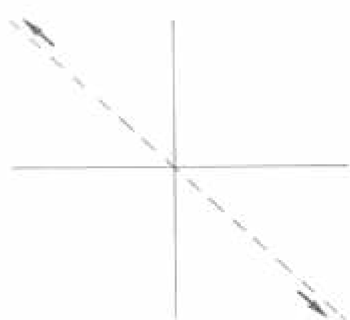
$\underline{y = -x}$ es asíntota.

Estudiemos la posición de la curva respecto de esta asíntota:

$$(y_{curva} - y_{asintota}) = \frac{x^3}{1-x^2} + x = \frac{x}{1-x^2} < 0 \quad \text{para } x \to +\infty ,$$

la curva está por debajo de la asíntota para $x \to +\infty$.

Por la simetría de la curva, para $x \to -\infty$ la curva queda por encima de la asíntota.



Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \quad ; \qquad f'(x)=0 \Rightarrow x^2(3-x^2)=0 \quad \Rightarrow$$

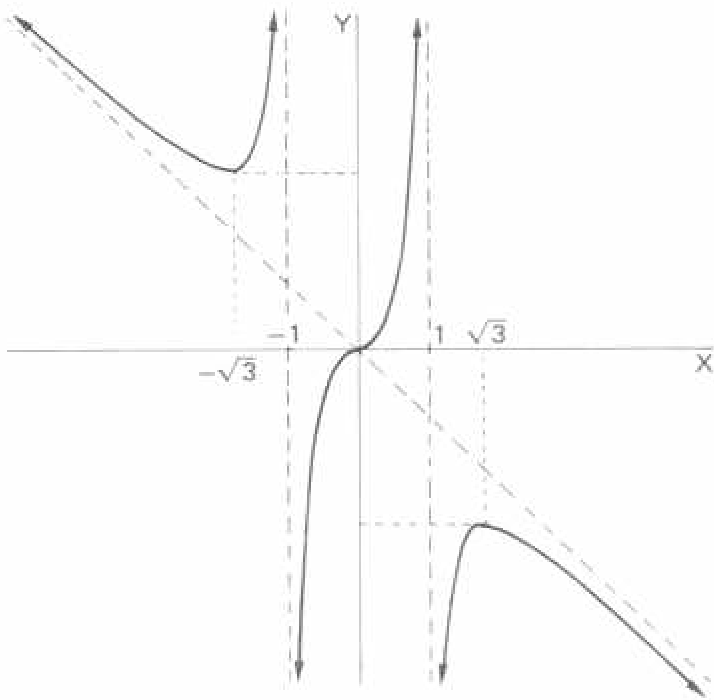
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3-x^2=0 \ ; \quad x=\pm\sqrt{3} \ ; \quad f(\sqrt{3}) = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{1-3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{-2} \ ; \qquad f(-\sqrt{3}) = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{1-3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Para $x \neq \pm 1$: $\qquad f'(x) = \dfrac{x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(1-x)^2(1+x)^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+		+		+	0	—	
$f(x)$		↘	mínimo	↗		↗		↗	máximo	↘	

La función es decreciente en los intervalos $]-\infty, -\sqrt{3}[$ y $]\sqrt{3}, +\infty[$, y creciente en los intervalos $]-\sqrt{3}, -1[$; $]-1, 1[$ y $]1, \sqrt{3}[$.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva.



13.3 **Represéntese graficamente la función** $\quad f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+16}$

Estúdiese su continuidad y derivabilidad.

(Univ. de Cádiz)

Las funciones $g: R \to R$ definida por $g(x) = x^2 + 4$, y $j: R \to R$ definida por $j(x) = x^2 + 16$, por ser funciones polinómicas, son continuas y derivables en todos sus puntos, y como $j(x)$ no se anula para ningún valor real de x, la función f definida por $f(x) = \dfrac{g(x)}{j(x)}$ es continua y derivable para todo valor real de x.

Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 4}{(-x)^2 + 16} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 16} = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY

El estudio queda reducido a los valores de $x > 0$.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$; $y = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0$, $x^2 = -4$, sin solución real.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 16} = 1 \Rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal

$y_{curva} - y_{asíntota} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 16} - 1 = \dfrac{-12}{x^2 + 16} < 0 \Rightarrow$ la curva queda por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Como $x^2 + 16 = 0$ no tiene raices reales, no hay ningún valor finito de x que haga la y infinita. No hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales: Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas.

Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 16) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 16)^2} = \frac{24x}{(x^2 + 16)^2} \; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	mínimo	↗	

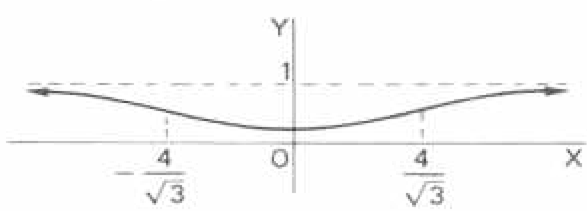
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{24(x^2 + 16)^2 - 2(x^2 + 16) \cdot 2x \cdot 24x}{(x^2 + 16)^4} = \frac{-24(3x^2 - 16)}{(x^2 + 16)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16 = 0 \; ; \quad x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{4}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		cóncava	p. inf.	convexa	p. inf.	cóncava	

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



13.4 **Representar gráficamente la función** $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$

(Univ. de Santiago)

Campo de existencia:

$$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

la función no está definida para $x=1$ y $x=4$, valores de x que anulan el denominador.

Corte con los ejes: $x=0,\ y=0;\ y=0,\ x=0.$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-5x+4}=0.$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

para $x\to+\infty$: $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}>0$, la curva queda por encima de la asíntota.

" $x\to-\infty$: $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}<0$, la curva queda por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Son de la forma $x=k$, siendo x los valores finitos de x que hacen y infinito. En las funciones racionales, k son los valores de x que anulan el denominador.

Las rectas $x=1$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

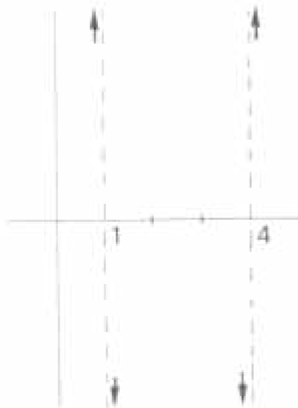
Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(1-h)=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{1-h}{[(1-h)-1][(1-h)-4]}=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{1-h}{-h(-3-h)}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(1+h)=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{1+h}{[(1+h)-1][(1+h)-4]}=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{1-h}{h(-3+h)}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(4-h)=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{4-h}{[(4-h)-1][(4-h)-4]}=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{4-h}{-h(3-h)}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(4+h)=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{4+h}{[(4+h)-1][(4+h)-4]}=\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}}\frac{4+h}{h(3+h)}=+\infty$$



Como hay asíntotas horizontales para $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, no hay asíntotas oblícuas.

Máximos y mínimos:

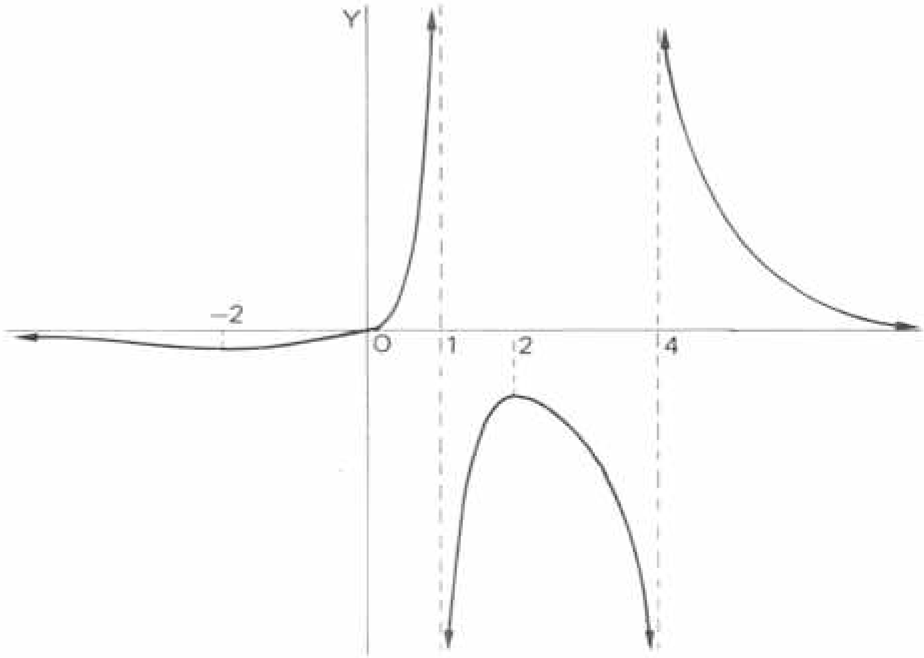
$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-5x+4)-x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{(2+x)(2-x)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2+x)(2-x)=0;\ x_1=-2,\ x_2=2;\ f(-2)=\frac{-2}{4+10+4}=\frac{-1}{9};\ f(2)=-1$$

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	¦	+	0	—	¦	—	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{9}$	↗	¦	↗	-1	↘	¦	↘	

La función tiene un mínimo (relativo) para $x = -2$, y un máximo (relativo) para $x = 2$.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva.



13.5 Dada la función $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$

estudiar su crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad.

Hacer una representación aproximada de $y = f(x)$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$f(x) = 2x^3 - 8x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 8 = 0$; $x^2 = \dfrac{4}{3}$; $x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

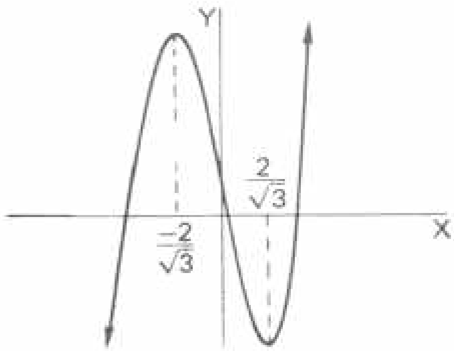
$f'(x) = 6(x - \dfrac{2}{\sqrt{3}})(x + \dfrac{2}{\sqrt{3}})$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—		+	
$f(x)$		creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente	

$f''(x) = 12x$; $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0$; $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		—	0	+	
$f(x)$		cóncava	Punto inflexión	convexa	

$f(0) = 1$; $f(1) = -5$; $f(-1) = 7$; $f(2) = 1$; $f(-2) = 1$; $f(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}) \approx 7{,}15$; $f(\dfrac{2}{\sqrt{3}}) \approx -5{,}15$



13.6 **Representar gráficamente la función**

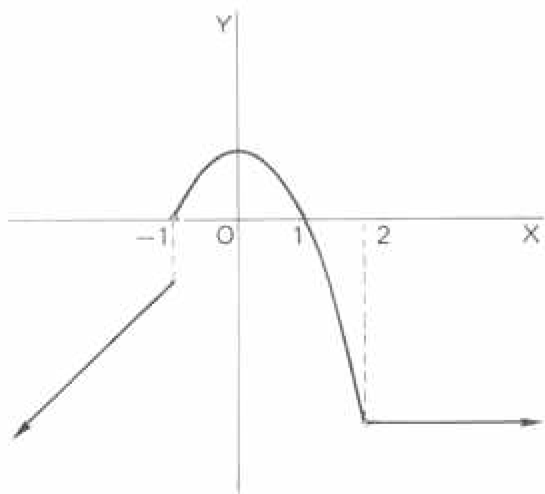
$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq -1) \\ 1-x^2 & (-1 < x \leq 2) \\ -3 & (2 < x) \end{cases}$$

Indíquese además $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y clasifíquese la discontinuidad en el punto $x = -1$.

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

En el intervalo $]-\infty, -1]$ la gráfica de la función es la de la recta $y = x$.

En el intervalo $]-1, 2]$ la gráfica de la función es la de la parábola $y = 1 - x^2$:



$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \; ; \; y = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \pm 1 \; ; \; f(-1^+) \to 0 \; ; \; f(2) = -3$$

$$y' = -2x \; ; \; y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = -2 < 0 \Rightarrow \text{hay un máximo en } x = 0$$

En el intervalo $]2, +\infty[$ la gráfica de la función es la de la recta $x = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{h \to 0} [1 - (2-h)^2] = 1 - 4 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim\limits_{h \to 0} (-3) = -3 \end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(-1-h) = \lim\limits_{h \to 0} (-1-h) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(-1+h) = \lim\limits_{h \to 0} [1 - (-1+h)^2] = 0 \end{array}\right|$$

como estos límites son distintos, la continuidad es de *primera especie*.

3.7 Sea:
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -8 \leqslant x \leqslant -4 \\ x+2 & \text{si} \quad -4 < x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

Se pide:

a) Representar gráficamente $f(x)$
b) Estudiar la continuidad y crecimiento de $f(x)$
c) Determinar $f^{-1}(1)$
d) Obtener la gráfica de $|f(x)|$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

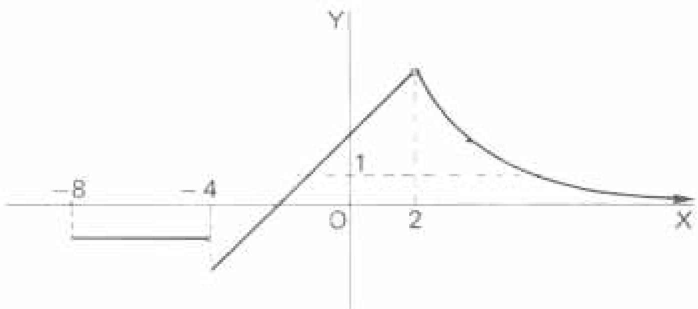
a) En el intervalo $[-8,-4[$ la gráfica es la recta $y = -1$

En el intervalo $[-4,2[$ es la recta $y = x+2$

Estudiemos la función en el intervalo $[2,+\infty[$:

$$f(2) = \frac{8}{2} = 4 \ ; \ f'(x) = \frac{-8}{x^2} < 0, \text{ la función es decreciente}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow \text{la recta } y = 0 \text{ es asintota horizontal}$$



b) La función es discontinua en $x = -4$, en efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(-4-h) = \lim\limits_{h\to 0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(-4+h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} [(-4+h)+2] = -2 \end{array}\right| \Rightarrow \text{por no ser estos límites iguales, la función no es continua en } x=-4.$$

También se podía haber visto la discontinuidad de la función al considerar que:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(-4-h) = -1 \neq f(-4) = -4+2 = -2$$

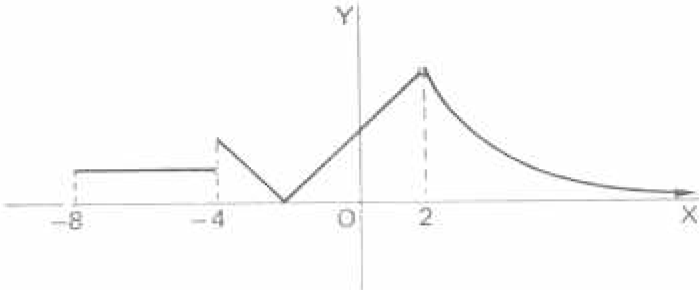
La función es constante en el intervalo $[-8,-4[$, es creciente en el intervalo $[-4,2[$ y decreciente en el intervalo $[2,+\infty[$.

c) De la gráfica se desprende que $f^{-1}(1)$ consta de dos elementos, uno perteneciente al intervalo $[-4,2[$ y otro al intervalo $[2,+\infty[$:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{– en el intervalo } [-4,2[: & x+2=1 \ ; & x=-1 \\ \text{– en el intervalo } [2,+\infty[: & \dfrac{8}{x}=1 \ ; & x=8 \end{array}\right| \Rightarrow f^{-1}(1) = \{-1, 8\}$$

d) Considerando que $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de x que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{para los valores de x que hacen } f(x) < 0 \end{cases}$

resulta la gráfica de $|f(x)|$



13.8 Hallar la gráfica de $y = \dfrac{e^x}{x}$

(Univ. de Madrid)

Campo de existencia: La función no está definida para $x = 0$, valor de x que anula el denominador. El campo de existencia es: $R - \{0\}$.

Corte con los ejes: $y = 0 \Rightarrow e^x = 0$, no existe ningún valor de x que haga $e^x = 0$. La gráfica no corta a los ejes.

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$, siendo $k = \lim\limits_{x \to \infty} y$, pero por intervenir una expresión exponencial (e^x), hay que considerar, por separado, los casos en que $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \Rightarrow \text{no hay asíntota horizontal para } x \to +\infty.$$

Para $x \to -\infty$, haciendo el cambio $x = -t$, cuando $x \to -\infty$, $t \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{-t \cdot e^t} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

Como para $x \to -\infty$, $\dfrac{e^x}{x} < 0$, la curva está por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Són de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen la y infinito. En este caso es: $x = 0$.

Como para $x > 0$, $x \to 0$, $\dfrac{e^x}{x} \to +\infty$, la curva se acerca a la asíntota $x = 0$, por la derecha, según valores positivos de y.

Para $x < 0$, $x \to 0$, $\dfrac{e^x}{x} \to -\infty$, la curva se acerca a la asíntota $x = 0$, por la izquierda, según valores negativos de y.

Asíntotas generales: Son de la forma $y = mx + b$, siendo $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x}$, y $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx)$.

Como para $x \to -\infty$ hay asíntota horizontal, sólo tendremos que estudiar las asíntotas generales para $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \Rightarrow \text{no hay asíntota general, la}$$

curva termina en una rama parabólica de dirección vertical.

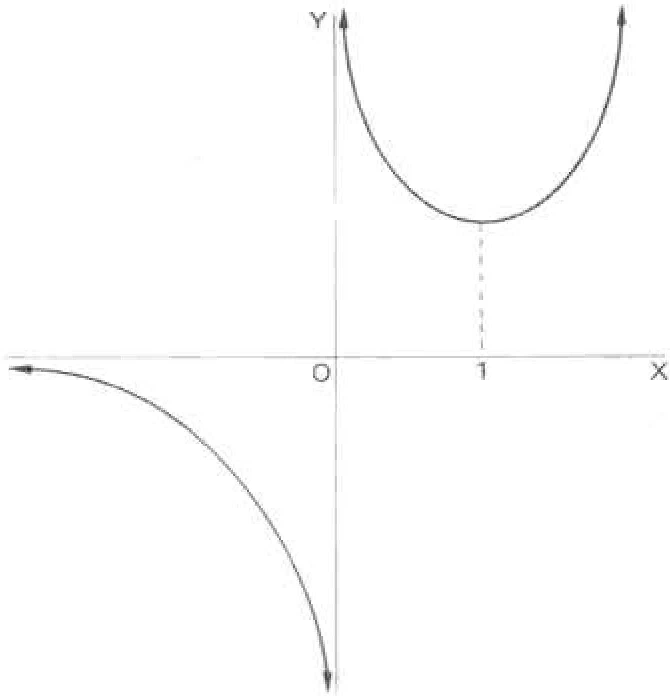
Maximos y mínimos:

$$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad ; \quad y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{no tiene solución} \\ x - 1 = 0 & \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Estudiemos la variación de la curva:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$\vdots$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Con los calculos hechos podemos dibujar la curva:



13.9 **Dada la función** $f(x) = xe^{-x}$

a) Estudiar su dominio; las asíntotas; los máximos y mínimos locales; puntos de inflexión y los intervales de crecimiento y decrecimiento.

b) Hacer su representación gráfica.

(Univ. de las Islas Baleares)

Dominio: La función está definida para todo valor real de x.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ (no tiene solución)} \end{cases}$

Asíntotas horizontales: Por ser una función potencial exponencial hay que estudiar las asíntotas horizontales para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal (para } x \to +\infty).$$

Como $x\,e^{-x} > 0$ para $x > 0$, la curva queda por encima de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = (-\infty)\,e^{+\infty} = -\infty \Rightarrow$$ no hay asíntota horizontal para $x \to -\infty$.

Asíntotas verticales: No hay; puesto que no hay ningún valor finito de x que haga la y infinito.

Asíntotas oblicuas: Sólo hay que estudiarla para $x \to -\infty$; ya que para $x \to +\infty$ hay asíntota horizontal.

$$y = mx + b \left\{ \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = \infty \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - mx) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ no hay asíntota oblicua; la curva termina en una rama parabólica de de dirección vertical.

Maximos y minimos: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x\,e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{-x} = 0 \quad \text{no tiene solución} \\ 1 - x = 0;\ x = 1;\quad f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{array} \right.$$

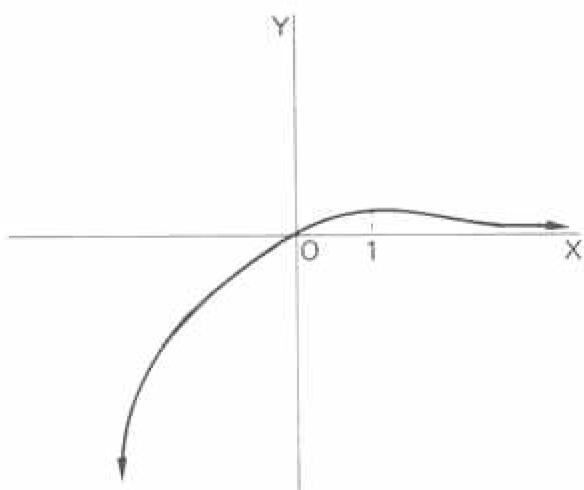
$f''(x) = e^{-x}(-1)(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$; $f''(1) = e^{-1}(1-2) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow$ la curva tiene un máximo en el punto $(1;\ \frac{1}{e})$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		creciente	máximo	decreciente	

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0;\ x = 2;\ f(2) = \dfrac{2}{e^2}$

$f'''(x) = e^{-x}(-1)(x-2) + e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}(3-x)$; $f'''(2) = e^{-2} \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow$ el punto $(2;\ \dfrac{2}{e^2})$ es de inflexión.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva



13.10 **Representa graficamente la función $y = x \cdot \log x$. Indicando el dominio de definición, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas.**

(Univ. de Santiago, 1991)

Dominio de definición. Como $\log x$ sólo existe para $x > 0$, el dominio de definición de la función es $\mathbb{R}^*_+$ $(0 < x < +\infty)$.

Corte con los ejes: $y = 0 \Rightarrow x \cdot \log x = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 0, \text{ (no sirve por no pertenecer al dominio de definición).} \\ \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Es conveniente ver como se acerca la curva al eje OY cuando $x \to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \cdot \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \log x = +\infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

Verticales: Son de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen y infinito. En este caso, como para $x \to 0$, $\log x \to -\infty$, la recta $x = 0$ podría ser asíntota vertical, pero hemos visto que para $x \to 0$, $x \cdot \log x \to 0$, luego no hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales u oblicuas:

$y = mx + b$; $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty \Rightarrow$ no hay asíntotas generales, la curva tiene una rama parabólica de dirección vertical.

Máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \log x + 1 = 0$; $\log x = -1$; $x = e^{-1}$

$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \log e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = \frac{-1}{e}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreciente	$\frac{-1}{e}$	creciente

La función tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{1}{e}$ igual a $\frac{-1}{e}$.

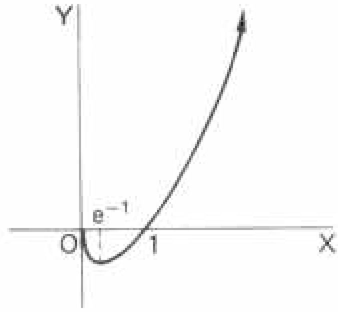
Es conveniente estudiar con qué inclinación se acerca la curva al punto $(0,0)$:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (\log x + 1) = -\infty$$

Concavidad y convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ (ecuación que no tiene solución), no hay puntos de inflexión.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	convexa	

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



13.11 Construir la curva $y = \sqrt{3^x - 9}$

(Univ. de Valladolid, 1991)

Campo de existencia: $3^x - 9 \geq 0 \Rightarrow 3^x \geq 9\ ;\ x \geq 2\ ;\ y \geq 0$

Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow 3^x - 9 = 0\ ;\ x = 2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3^x - 9} = +\infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: No hay ningún valor finito de x que haga la y infinito. No hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3^x - 9}}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3^x \log 3}{2\sqrt{3^x - 9}}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3^x} \cdot \log 3}{2\sqrt{1 - \dfrac{9}{3^x}}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{2\sqrt{1 - 0}}\right) = \infty \Rightarrow$$ la curva tiene una rama parabólica de dirección vertical.

Máximos y mínimos: $y' = \dfrac{3^x \cdot \log 3}{2\sqrt{3^x - 9}} > 0 \Rightarrow$ la curva es creciente para $x > 2$, y como para $x \to 2^+$, $y' \to +\infty$, en el punto (2, 0) tiene una tangente vertical.

Puntos de inflexión: $y' = \dfrac{\log 3}{2} \cdot 3^x (3^x - 9)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

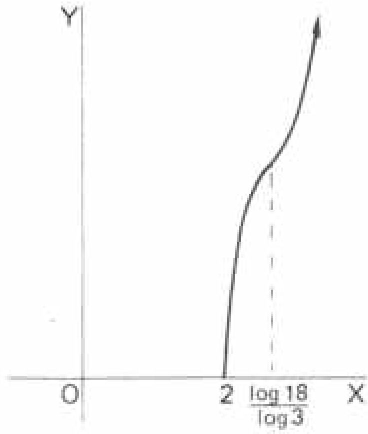
$$y'' = \frac{\log 3}{2}\left((3^x \log 3)(3^x - 9)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(3^x - 9)^{-\frac{3}{2}}(3^x \log 3) \cdot 3^x\right) =$$

$$= \frac{\log 3}{2}(3^x \cdot \log 3)\left(\frac{1}{\sqrt{3^x - 9}} - \frac{1}{2}\,\frac{3^x}{(3^x - 9)\sqrt{3^x - 9}}\right) = \frac{(\log 3)^2}{2} \cdot 3^x \cdot \frac{2(3^x - 9) - 3^x}{2(3^x - 9)\sqrt{3^x - 9}} =$$

$$= \frac{(\log 3)^2}{4} \cdot 3^x \,\frac{3^x - 18}{(3^x - 9)\sqrt{3^x - 9}}$$

$y'' = 0 \Rightarrow 3^x - 18 = 0\ ;\ 3^x = 18\ ;\ x \log 3 = \log 18\ ;\ x = \dfrac{\log 18}{\log 3} \approx 2{,}63\ ;\ f(2{,}63) \approx 3$

x	2		$\frac{\log 18}{\log 3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		cóncava		cónvexa	



13.12 Representar gráficamente la función $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x$$

(Univ. de Murcia)

Simetrías y periocidad:

$f(-x) = 2\cos(-x) - \cos 2(-x) = 2\cos x - \cos 2x = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

La función h: $R \to R$ definida por $h(x) = 2\cos x$ es periódica de periodo $T_1 = 2\pi$.

La función g: $R \to R$ definida por $g(x) = \cos 2x$ es periódica de periodo $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\pi} = \frac{2}{1} \Rightarrow T = 1 \cdot T_1 = 2 \cdot T_2 = 2\pi$$ es el periodo de la función $f = h - g$.

Por ser la función periódica, de periodo 2π, sólo tendremos que estudiarla en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y por ser función par sólo la tendremos que estudiar en el intervalo $[0, \pi]$

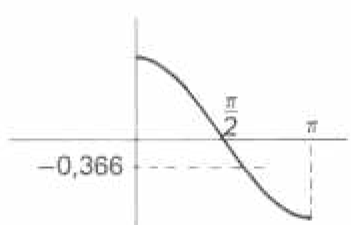
Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot \cos 0 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$

$y = 0 \Rightarrow 2\cos x - \cos 2x = 0$; $2\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 0$; $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1-1{,}732}{2} = -0{,}66$$

(la solución $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$ no sirve).

Al cortar la gráfica de $y = \cos x$, en el intervalo $[0, \pi]$, por la recta $y = -0{,}366$, resulta que hay un punto de corte, en el intervalo $[0, \pi]$.



Máximos y mínimos:

$f'(x) = -2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x\,;\quad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x = 0\,;\; -\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0\,;$

$$\text{sen}\,x\,(-1 + 2\cos x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{sen}\,x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0\,;\;\; x_2 = \pi \\ 1 - 2\cos x = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_3 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$f(0) = 1\,;\quad f(\pi) = 2(-1) - 1 = -3\,;\quad f(\frac{\pi}{3}) = -2\cos^2\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} + 1 = -2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

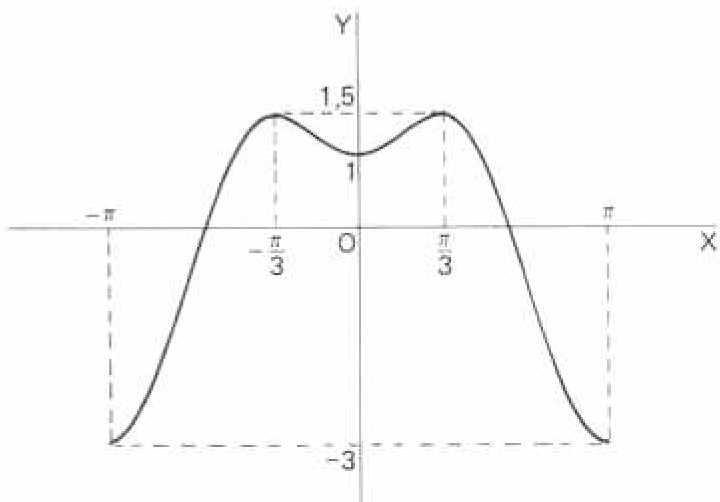
$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

$$f''(0) = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo en } x = 0$$

$$f''(\frac{\pi}{3}) = -2\cdot\frac{1}{2} + 4(-\frac{1}{2}) < 0 \;\Rightarrow\; \text{máximo en } x = \frac{\pi}{3}$$

$$f''(\pi) = -2(-1) + 4(1) > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo en } x = \pi$$

Con los cálculos hechos podemos dibujar la curva.



CAPITULO 14

INTEGRALES INDEFINIDAS

PRIMITIVAS DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Sean f y F dos funciones tales que sus conjuntos de definición contienen un mismo intervalo I de R. Se dice que F es una **primitiva** de f en I si y solo si F es derivable en I y tiene por función derivada en I la función f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Si la función f admite una primitiva F en I, el conjunto de todas las primitivas de f en I está formado por las funciones $F + C$, siendo C una constante real cualquiera. A este conjunto se le llama **integral indefinida** de f y se simboliza por la notación.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

leyéndose el primer miembro: *integral de f(x) o de f(x) dx.* A la función f se le llama *función a integrar* o *función subintegral*, y al producto $f(x)dx$ *expresión subintegral.*

Si la función F es una primitiva de f en el intervalo I, también F es una primitiva de f en cualquier intervalo $J \subset I$.

Si F y G son dos primitivas de una misma función f en el intervalo I, las dos funciones tienen la misma derivada en I, y su diferencia será una función constante en I, es decir, existe un número real C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$.

Si F es una primitiva de f en el intervalos I_1 y G es una primitiva de f en el intervalo I_2, siendo I_1 distinto de I_2, la propiedad anterior puede no cumplirse.

No todas las funciones tienen primitiva, pero sí todas las funciones continuas en el intervalo I poseen una primitiva en I, y por lo tanto una integral indefinida.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Si F es una primitiva de f en I:

1º) $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

2º) $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

3º) $$\int \frac{d\,[f(x)]}{dx}dx = f(x) + C$$

4º) $$\int d\,[f(x)] = f(x) + C$$

Estas propiedades nos dice que los signos de derivación (o diferenciación) y de integración se destruyen, pero cuando el de integración va delante hay que sumar una constante

5º) Si λ es una constante: $$\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$$

6º) Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ son constantes:

$$\int [\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \cdots + \lambda_n \cdot f_n(x)]\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + \cdots +$$
$$+ \cdots + \lambda_n \int f_n(x)\,dx$$

7º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax) + C$$

8º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$$

9º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C$$

CALCULO DE PRIMITIVAS.

No existe un método general para calcular las primitivas de las funciones elementales.

Para hallar todas las primitivas de una función, basta obtener sólo una primitiva. Todas las restantes primitivas son iguales a la hallada más una constante.

El cálculo del conjunto de las primitivas de una función se llama *integración* de esta función.

La derivada de una función elemental es otra función elemental, pero la primitiva de una función elemental puede que no se pueda expresar con la ayuda de un número finito de funciones elementales, así ocurre, entre otras, con las primitivas de las funciones **f** tales que $f(x)$ es igual a

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \sqrt{1-a^2\operatorname{sen}^2 x}$$

De la definición de función primitiva y del cuadro de derivadas de funciones elementales y de funciones compuestas se deduce el cuadro de integrales inmediatas.

El siguiente cuadro se supone válido para todo intervalo $I \subset R$ en el que la función f es continua y derivable, con las observaciones indicadas a la derecha de cada fórmula.

Omitiremos en todas las primitivas la constante de integración.

INTEGRALES INMEDIATAS	EJEMPLOS
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$	$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$ $\int (ax+b)^3\,dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^3 \cdot a\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^4}{4}$ $\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-3} \cdot a\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{-2}}{-2}$ $\int \sqrt{\text{sen } x}\,\cos x\,dx = \int (\text{sen } x)^{\frac{1}{2}} \cos x\,dx = \frac{(\text{sen } x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$ $= \frac{2}{3}\,(\text{sen } x)^{\frac{3}{2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{-x}}\,dx = -\int (-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\,dx = -\frac{(-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$ $= -2\,(-x)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{-x}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log \lvert f(x) \rvert \qquad f(x) \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log \lvert ax+b \rvert$ $\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,dx = \log \lvert \log x \rvert$ $\int \text{tg } x\,dx = -\int \frac{-\text{sen } x}{\cos x}\,dx = -\log \lvert \cos x \rvert$ $\int \text{ctg } (ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\cos (ax+b) \cdot a}{\text{sen } (ax+b)}\,dx =$ $= \frac{1}{a}\,\log \lvert \text{sen } (ax+b \rvert$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}$	$\int e^x\,dx = e^x$ $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int e^{ax+b} \cdot a\,dx\,x = \frac{1}{a}\,e^{ax+b}$

	$\int e^{x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = e^{\operatorname{tg} x}$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}}$
$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$ $\int a^{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\int a^{5x+3}\cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{a^{5x+3}}{\log a}$ $\int \frac{a^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int a^{\operatorname{arc\,sen} x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{a^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\log a}$
$\int \operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x) = -\cos f(x)$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$ $\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen}(ax+b)\cdot a\,dx =$ $= -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x}$
$\int \cos f(x)\cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x)$	$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \cos(ax+b)\cdot a\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)$ $\int e^{2x}\cos e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos e^{2x}\cdot(e^{2x}\cdot 2)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} e^{2x}$ $\int \frac{\cos(\operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}\,dx = \int \cos(\operatorname{arc\,tg} x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$ $= \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x)$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \int [1+\operatorname{tg}^2 f(x)]\cdot f'(x)\,dx =$ $= \operatorname{tg} f(x)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3$

$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = \int [1+\operatorname{ctg}^2 f(x)]\,f'(x)\,dx =$ $= -\operatorname{ctg} f(x)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{\operatorname{sen}^2(ax+b)}\,dx = -\operatorname{ctg}(ax+b)$ $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2(5+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\operatorname{sen}^2(5+x^2)}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(5+x^2)$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen} f(x) \\ -\operatorname{arc\,cos} f(x) \end{cases}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen} x \\ -\operatorname{arc\,cos} x \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}\,dx =$ $= \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sen}(ax+b) \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cos}(ax+b) \end{cases}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{4x^2}{9}\right)}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} =$ $= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}x \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{2}{3}x \end{cases}$
$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} f(x) \\ -\operatorname{arc\,ctg} f(x) \end{cases}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x \\ -\operatorname{arc\,ctg} x \end{cases}$ $\int \frac{dx}{1+(ax+b)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{1+(ax+b)^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}(ax+b) \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}(ax+b) \end{cases}$ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} e^x \\ -\operatorname{arc\,ctg} e^x \end{cases}$ $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg} x^2 \end{cases}$ $\int \frac{5}{4+(8x+6)^2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{1+(4x+3)^2}\,dx =$ $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{4}{1+(4x+3)^2}\,dx = \begin{cases} \frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg}(4x+3) \\ -\frac{5}{16}\operatorname{arc\,ctg}(4x+3) \end{cases}$

METODO DE SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE

Si f es una función real continua en el intervalo $[a, b]$ y g una función biyectiva del intervalo $[\alpha, \beta]$ sobre $[a, b]$, derivable y con derivada continua, definida por

$$x = g(t)$$

se tiene, al ser $dx = g'(t) \cdot dt$:

$$\int f(x)\, dx = \int f[g(t)]\, g'(t)\, dt \qquad (1)$$

estando la última integral definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Prácticamente se sustituye x por $g(t)$ y dx por $g'(t)\, dt$.

El método de sustitución se aplica cuando la integral del segundo miembro de (1) es más sencilla de calcular que la del primer miembro.

A menudo, la sustitución se expresa de la forma $t = h(x)$, o bien de la forma $j(x) = k(t)$.

Después de calcular la integral del segundo miembro de (1), se ha de sustituir la variable t por su expresión en función de x.

Sea calcular $$I = \int \sqrt{-x}\, dx$$

Haciendo el cambio $-x = t^2$: $(-1)dx = 2t\,dt$, de donde: $I = \int t(-2t)\, dt = -2\int t^2 dt = -2\,\frac{t^3}{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3}$

Sea calcular $$I = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 5}}\, dx$$

Haciendo el cambio $e^x - 5 = t^2$: $e^x dx = 2t\,dt$, de donde: $I = \int \frac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t = 2\sqrt{e^x - 5}$

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.

Para el cálculo de la integral $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros en x con coeficientes reales, se efectúa la división de $P(x)$ por $Q(x)$ (sólo en el caso de que el grado del numerador sea igual o mayor que el del denominador):

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

$\int C(x)\, dx$ es inmediata ya que $C(x)$ es un polinomio, quedando el problema reducido al cálculo de la integral

$$I = \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

en donde el grado del numerador es menor que el del denominador.

Si $a, b, \cdots$ son las raíces reales de la ecuación $Q(x) = 0$, de órdenes de multiplicidad $\alpha, \beta, \cdots$, y $p \pm qi, r \pm si, \cdots$ las raíces imaginarias conjugadas con órdenes de multiplicidad $\lambda, \mu, \cdots$, es decir:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots[(x-p)^2+q^2]^{\lambda}[(x-r)^2+s^2]^{\mu}\cdots$$

se descompone $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{[(x-p)^2+q^2]^\lambda} + \frac{M_{\lambda-1}x + N_{\lambda-1}}{[(x-p)^2+q^2]^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x-p)^2+q^2} + \\ & + \frac{S_\mu x + T_\mu}{[(x-r)^2+s^2]^\mu} + \frac{S_{\mu-1}x + T_{\mu-1}}{[(x-r)^2+s^2]^{\mu-1}} + \cdots + \frac{S_1 x + T_1}{(x-r)^2+s^2} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \cdots, A_1, B_\beta, B_{\beta-1}, \cdots, B_1, M_\lambda, N_\lambda, \cdots, S_1, T_1$, se reduce la expresión anterior a la forma entera multiplicando ambos miembros por $Q(x)$. En la forma entera se sustituye, en ambos miembros, la x por los valores de las raíces reales, lo que nos dará directamente $A_\alpha, B_\beta, \cdots$; después se igualan los coeficientes de los términos de igual grado hasta obtener tantas ecuaciones como coeficientes falten por determinar.

Hallada la descomposición en fracciones simples, nos quedarán integrales de los siguientes tipos:

1º) $$\int \frac{A}{x-a} = A \cdot \log |x-a|$$

2º) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$$

3º) $$\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx$$

4º) $$\int \frac{Mx+N}{[(x-p)^2+q^2]^n}\,dx \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$$

Las integrales del tipo $I = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx$ se calculan expresando el numerador en forma del producto de una constante (que se saca fuera del signo integral) por una suma de dos sumandos, el primero de ellos que sea $2x-2p$, derivada del denominador, y el segundo una constante. La integral se descompone en dos, una de ellas del tipo logarítmico $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ y la otra del tipo arco tangente $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \text{arc tg } f(x)$.

Los pasos a seguir son los siguientes:

a). Para obtener $2x$ en el numerador, se multiplica éste por $\frac{2}{M}$, y fuera del signo integral por $\frac{M}{2}$:

$$I = \frac{M}{2}\int \frac{\frac{2}{M}\,M\cdot x + \frac{2}{M}\cdot N}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x-p)^2+q^2}\,dx$$

b). Para obtener el sumando $2x-2p$ en el numerador, se suma a éste $-2p+2p\ (=0)$:

$$I = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2p+2p+\frac{2N}{M}}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x-2p)+(2p+\frac{2N}{M})}{(x-p)^2+q^2}\,dx$$

c). Se descompone la integral en dos, la primera de ellas es inmediata por ser el numerador la derivada del denominador:

$$I = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2p}{(x-p)^2+q^2}\,dx + \frac{M}{2}\int \frac{2p+\frac{2N}{M}}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{M}{2}\log[(x-p)^2+q^2] +$$

$$+\frac{M}{2}\left(2p+\frac{2N}{M}\right)\int \frac{1}{q^2+(x-p)^2}\,dx \qquad (\alpha)$$

d). Esta última integral es del tipo arco tangente:

$$\int \frac{1}{q^2+(x-p)^2}\,dx = \frac{1}{q^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{q}-\frac{p}{q}\right)^2}\,dx = \frac{1}{q^2}\cdot q\int \frac{\frac{1}{q}}{1+\left(\frac{x}{q}-\frac{p}{q}\right)^2}\,dx = \frac{1}{q}\text{ arc tg}\left(\frac{x}{q}-\frac{p}{q}\right)$$

llevando este valor a (α) obtenemos:

$$I = \frac{M}{2}\log[(x-p)^2+q^2] + \frac{Mp+N}{q}\cdot\text{arc tg}\,\frac{x-p}{q}$$

La integral $I = \int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx$ se puede resolver también haciendo el cambio: $x-p = q\cdot u$; $x = q\cdot u + p$, $\quad dx = q\cdot du$:

$$I = \int \frac{M(qu+p)+N}{q^2u^2+q^2}\cdot q\,du = \frac{q}{q^2}\int \frac{Mqu+Mp+N}{u^2+1}\,du = \frac{1}{q}\int \frac{Mqu}{u^2+1}\,du + \frac{1}{q}\int \frac{Mp+N}{u^2+1}\,du =$$

$$= \frac{Mq}{2q}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + \frac{Mp+N}{q}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{M}{2}\log(u^2+1) + \frac{Mp+N}{q}\operatorname{arc\,tg} u$$

deshaciendo el cambio: $\quad I = \dfrac{M}{2}\log\left[\left(\dfrac{x-p}{q}\right)^2+1\right] + \dfrac{Mp+N}{q}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-p}{q}$

Sea calcular $$I = \int \frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$$

El grado del numerador es menor que el grado del denominador. Las raíces del denominador son 1 (doble) y −2, descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow$$

$$3x^2-9x+15 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x=1: & 9 = 3A \\ \text{para } x=-2: & 45 = 9C \\ \text{coef. de } x^2: & 3 = B+C \end{array}\right| \Rightarrow A=3,\ C=5,\ B=-2$$

$$I = \int\left(3(x-1)^{-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2}\right)dx = 3\,\frac{(x-1)^{-1+1}}{-2+1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2| =$$

$$= \frac{-3}{x-1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2|$$

Sea calcular $$I = \int \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x}\,dx$$

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, se hace la división:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-x^2+2x-1 & x^3+x \\ \underline{-5x^3 \qquad -5x} & 5 \\ \quad -x^2-3x-1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x} = 5 - \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} \qquad (1)$$

Descompongamos la fracción de (1) en fracciones simples:

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=0,\ \text{raíces imaginarias} \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \Rightarrow x^2+3x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x=0: & 1 = A \\ \text{coef. de } x^2: & 1 = A+B \\ \text{coef. de } x: & 3 = C \end{array}\right| \Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=3 \Rightarrow \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1}, \text{ de donde:}$$

$$I = \int\left(5 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 5x - \log|x| - 3\operatorname{arc\,tg} x$$

Calcular $$I = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$$ *(Univ. de Castilla – La Mancha 1991)*

$$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{4} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1\pm\sqrt{2}i \Rightarrow$$

$$x^2+2x+3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i) = (x+1)^2-(\sqrt{2}i)^2 = (x+1)^2+2$$

Al ser imaginarias las raíces del denominador, la integral se puede descomponer en dos, una del tipo logarítmico y la otra del tipo arco tangente.

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{-2}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - J \qquad (1) \quad ; \qquad J = \int\frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow (1): \quad I = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Sean **u** y **v** dos funciones derivables y con derivada primera continua en el intervalo I, se verifica:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Esta fórmula se llama de **integración por partes.**

La fórmula de integración por partes suele usarse en forma simplificada:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

y la mecánica que se sigue para calcular, por ejemplo, la integral $E = \int f(x)\cdot g(x)\,dx$ es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) \\ dv = g(x)\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = f'(x)\,dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad E = f(x)\cdot G(x) - \int G(x)\cdot f'(x)dx$$

Se emplea en los casos en que la función a integrar contenga una función transcendente de derivada algebraica: $\log f(x)$, $\text{arc sen } f(x)$, $\text{arc cos } f(x)$, $\text{arc tg } f(x)$, $\text{arc ctg } f(x)$, ..., identificando u con la función trascendente.

Sea calcular $$I = \int x^n\cdot\log x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = x^n\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}\,dx \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad I = (\log x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx =$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

PROBLEMAS

14.1 Calcular $$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

(Univ. de Santiago)

$$I = \int (x-1)^{-2}\,dx = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{-1}{x-1}}$$

14.2 Calcular $$I = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$$

(Univ. de Murcia)

$$I = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \boxed{2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}$$

14.3 Calcular $$I = \int \frac{(\log x)^2}{x}dx$$

(Univ. de Granada)

$$I = \int (\log x)^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\log x)^{3+1}}{3+1} = \boxed{\frac{1}{4}(\log x)^4}$$

14.4 Calcular $$I = \int \frac{\log x^2}{x}\,dx$$

(Univ. de Murcia)

$$I = \int \frac{2\log x}{x}\,dx = 2\int (\log x)^1 \cdot \frac{1}{x}\,dx = 2\,\frac{(\log x)^{1+1}}{1+1} = \boxed{(\log x)^2}$$

14.5 **Calcular** $I = \int \text{sen}^2 3x \cdot \cos 3x \, dx$

(Univ. de Valencia)

$$I = \frac{1}{3} \int (\text{sen } 3x)^2 (\cos 3x \cdot 3) \, dx = \frac{1}{3} \frac{(\text{sen } 3x)^{2+1}}{2+1} = \boxed{\frac{1}{9} (\text{sen } 3x)^3}$$

14.6 **Calcular** $I = \int \text{tg } x \, dx$

(Univ. de Santiago)

$$I = -\int \frac{-\text{sen } x}{\cos x} dx = \boxed{-\log |\cos x|}$$

14.7 **Calcular** $I = \int \frac{x}{x^2+9} dx$

(Univ. de Madrid)

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx = \boxed{\frac{1}{2} \log (x^2+9)}$$

14.8 **Calcular** $I = \int \frac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x} dx$

(Univ. de La Laguna)

$$I = -\int \frac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x} dx = -\int \frac{(\text{sen } x + \cos x)'}{(\text{sen } x + \cos x)} dx = \boxed{-\log |\text{sen } x + \cos x|}$$

14.9 **Calcular** $I = \int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}} dx$

(Univ. de Murcia)

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{e^x}$.

$$I = \int \frac{3\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}+2} dx = 3 \cdot 2 \int \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{e^{\frac{x}{2}}+2} dx = \boxed{6 \log (e^{\frac{x}{2}}+2)}$$

14.10 Calcular $$I = \int \frac{1+\text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x}\, dx$$

(Univ. de Oviedo)

$$I = \int \frac{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + \text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x}\, dx = \int \frac{2\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x}\, dx = \int \left(\frac{2\,\text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{2\,\text{sen } x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\, dx = 2(-\log|\cos x|) + \log|\text{sen } x| = -\log(\cos x)^2 + \log|\text{sen } x| =$$

$$= \boxed{\log \frac{|\text{sen } x|}{(\cos x)^2}}$$

14.11 Calcular $$I = \int x \cdot \cos(x^2+2)\, dx$$

(Univ. de La Laguna)

$$I = \frac{1}{2} \int \cos(x^2+2) \cdot (2x)\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\,\text{sen } (x^2+2)}$$

14.12 Calcular $$I = \int \text{sen}^3 x\, dx$$

(Univ. de Alicante)

$$\text{sen}^3 x = \text{sen}^2 x \cdot \text{sen } x = (1-\cos^2 x)\,\text{sen } x = \text{sen } x - (\cos x)^2\,\text{sen } x \quad \Rightarrow$$

$$I = \int \text{sen } x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\,\text{sen } x)\, dx = -\cos x + \frac{(\cos x)^{2+1}}{2+1} = \boxed{-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x}$$

14.13 Calcular $$I = \int \left(2\,\text{sen } x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

(Univ. de Madrid)

$$I = 2\int \text{sen } x\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = 2(-\cos x) - \text{tg } x = \boxed{-2\cos x - \text{tg } x}$$

14.14 Calcular $$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$$

(Univ. de La Laguna)

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\,\text{arc sen } x^2}$$

14.15 **Calcular** $I = \int \frac{x}{x^4+9}\,dx$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{x}{1+\frac{x^4}{9}}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}x}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}\,dx = \boxed{\frac{1}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{3}}$$

14.16 **Calcular** $I = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

(Univ. de Murcia)

Multiplicando numerador y denominador por e^x: $\quad I = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\,dx = \boxed{\text{arc tg}\,e^x}$

14.17 **Calcular** $I = \int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

(Univ. de Extremadura)

$$I = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \boxed{\text{arc tg}\,x + \frac{1}{2}\log\,(1+x^2)}$$

14.18 **Calcular** $I = \int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$

(Univ. de Murcia)

Considerando que $x^2+2x = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$:

$$I = \int \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = x - \int (x+1)^{-2}dx = x - \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} = \boxed{x+\frac{1}{x+1}}$$

14.19 **Hallar la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función**

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \log\,(e^x+1)+C\,;\quad F(0)=2 \Rightarrow \log\,(e^0+1)+C=2\,;\quad C = 2-\log 2$$

$$\boxed{F(x) = \log\,(e^x+1)+2-\log 2}$$

14.20 Calcular $$I = \int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx$$

(Univ. de Madrid)

$$\begin{array}{r|l} \cos x & -\cos x + 1 \\ \cline{2-2} -\cos x + 1 & -1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad I = \int\left(-1 + \frac{1}{1-\cos x}\right)dx = -x + \int \frac{1}{1-\cos x}\,dx \qquad (1)$$

y considerando que $1 - \cos x = 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$: $\quad \int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}}\,dx =$

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,dx = -\,\text{ctg}\,\frac{x}{2} \quad \Rightarrow (1) \quad \boxed{I = -x - \text{ctg}\,\frac{x}{2}}$$

14.21 Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

(Univ. de Madrid)

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f''(x) = \int 24x\,dx = 24\,\frac{x^2}{2} + C = 12x^2 + C \Rightarrow f'(x) = \int (12x^2 + C)\,dx =$$

$$= 12\,\frac{x^3}{3} + Cx + D = 4x^3 + Cx + D \Rightarrow f(x) = \int (4x^3 + Cx + D)\,dx = 4\,\frac{x^4}{4} + C\,\frac{x^2}{2} + Dx + F$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow F = 0 \;;\quad f'(0) = 1 \Rightarrow D = 1 \;;\quad f''(0) = 2 \Rightarrow C = 2$$

de donde: $$\boxed{f(x) = x^4 + x^2 + x}$$

14.22 Calcular $$I = \int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx$$

(Univ. de Navarra)

Hallemos las raices de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$. Como la suma de los coeficientes es igual a 0, una raiz es 1. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3) \end{array}$$

Descomponiendo en fracciones simples: $$\frac{x^2 + 10x + 5}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$$

$$x^2 + 10x + 5 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x = 1: & 16 = & 8A \\ \quad " \quad x = -1: & -4 = & -4B \\ \quad " \quad x = -3: & -16 = & 8C \end{array}\right| \Rightarrow A = 2,\; B = 1,\; C = -2 \Rightarrow$$

$$I = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3} \right) dx = 2 \log |x-1| + \log |x+1| - 2 \log |x+3| =$$

$$= \log (x-1)^2 + \log |x+1| - \log (x+3)^2 = \boxed{\log \frac{(x-1)^2 \, |x+1|}{(x+3)^2}}$$

14.23 Calcular $$I = \int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

(Univ. de Castilla – La Mancha)
(Uinv. de Granada)

$$\begin{array}{rl|l}
x^4 - 3x^3 & \quad - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\
\cline{3-3}
-x^4 + x^3 + 2x^2 & & x - 2 \\
\cline{1-2}
-2x^3 + 2x^2 & - 3x - 2 & \\
2x^3 - 2x^2 & - 4x & \\
\cline{1-2}
& - 7x - 2 &
\end{array}
\Rightarrow \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 - \frac{7x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{7x + 2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

para $x = 0$: $2 = -2A$; $A = -1$

" $x = 2$: $16 = 6B$; $B = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $I = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1} \right) dx =$

" $x = -1$: $-5 = 3C$; $C = -\frac{5}{3}$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} - 2x + \log |x| - \frac{8}{3} \log |x-2| + \frac{5}{3} \log |x+1|}$$

14.24 Calcular $$I = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 6x + 10} dx$$

(Univ. de Valencia, 1991)

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 6x + 9 & x^2 - 6x + 10 \\
\cline{2-2}
-x^2 + 6x - 10 & 1 \\
\cline{1-1}
-1 &
\end{array}
\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 6x + 10} = 1 - \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \Rightarrow$$

$$I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \right) dx = x - \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} \qquad (1)$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \Rightarrow$$

$$x^2-6x+10 = (x-3-i)(x-3+i) = (x-3)^2-i^2 = (x-3)^2+1$$

de donde:
$$I = x - \int \frac{dx}{1+(x-3)^2} = \boxed{x - \text{arc tg }(x-3)}$$

14.25 **Encontrar una primitiva de la función** $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^3+x}$ *(Univ. de Barcelona)*

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \quad \text{(raíces imaginarias)} \end{cases}$$

$$\frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x^2-x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x=0: & 1 = A \\ \text{coef. de } x^2: & 1 = A+B \\ \text{" \quad " } x: & -1 = C \end{array}\right| \Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=-1 \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \boxed{\log|x| - \text{arc tg } x}$$

14.26 **Calcular** $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ *(Univ. de Cádiz)*

1 es raíz de $x^3-1=0$ ya que $1^3-1=0$. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\ ;\ x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \Rightarrow 1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x=1: & 1 = A\cdot 3 \\ \text{coef. de } x^2: & 0 = A+B \\ \text{para } x=0: & 1 = A-C \end{array}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{3}\ ;\ B=-\frac{1}{3}\ ;\ C=-\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x-2}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}J \qquad (1);\ \text{siendo } J = \int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

J se descompone en dos integrales, una del tipo logarítmico y otra del tipo arco tangente:

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}K \qquad (2)\ ; \qquad \text{y considerando que } \ x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}:$$

$$K = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad ; \qquad \text{llevando este resultado a (2) y a (1):}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$$

14.27 **Calcular** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\left((\log x)^3 - 2(\log x)^2 - \log x + 2\right)}$

(Univ. de Valladolid)

Haciendo el cambio $t = \log x$: $dt = \frac{1}{x}\,dx$:

$$I = \int \frac{1}{(\log x)^3 - 2(\log x)^2 - \log x + 2}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t^3 - 2t - t + 2}\,dt$$

Hallemos las raíces de $t^3 - 2t - t + 2 = 0$. Como la suma de los coeficientes es igual a 0, 1 es raiz. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \ \Rightarrow\ t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t^3 - 2t - t + 2 = (t-1)(t-2)(t+1)$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+1} \quad \Rightarrow$$

$$1 = A(t-2)(t+1) + B(t-1)(t+1) + C(t-1)(t-2)$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{para } t = 1: & 1 = A(-1)\cdot 2 & \Rightarrow & A = -\frac{1}{2} \\ \text{"} \quad t = 2: & 1 = B\cdot 1\cdot 3 & \Rightarrow & B = \frac{1}{3} \\ \text{"} \quad t = -1: & 1 = C(-2)(-3) & \Rightarrow & C = \frac{1}{6} \end{array}\right| \Rightarrow I = \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{\frac{1}{3}}{t-2} + \frac{\frac{1}{6}}{t+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{3}\log|t-2| + \frac{1}{6}\log|t+1|$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}\log|\log x - 1| + \frac{1}{3}\log|\log x - 2| + \frac{1}{6}\log|\log x + 1|}$$

14.28 Calcular $I = \int (x^2 - 2x - 3) \log x \, dx$

(Univ. de Madrid)

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = (x^2 - 2x - 3)dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{x^2}{2} - 3x \end{array} \Rightarrow I = (\log x)\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right) -$$

$$- \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\log x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right)dx =$$

$$= \boxed{\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\log x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x}$$

14.29 Calcular $f(x)$ de manera que $f'(x) = \log(4x^2 + 1)$ y $f(0) = 0$.

(Univ. de Madrid)

$f'(x) = \log(4x^2 + 1) \Rightarrow f(x)$ es una primitiva de $\log(4x^2 + 1)$: $f(x) = \int \log(4x^2 + 1)\, dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \log(4x^2 + 1) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{8x}{4x^2 + 1}dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow f(x) = [\log(4x^2 + 1)]x - \int x \frac{8x}{4x^2 + 1}dx \qquad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 & 4x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -8x^2 - 2 & 2 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array} \Rightarrow \int \frac{8x^2}{4x^2 + 1}dx = \int \left(2 - \frac{2}{4x^2 + 1}\right)dx = 2x - \int \frac{2}{1 + (2x)^2}dx =$$

$$= 2x - \text{arc tg } 2x + C$$

llevando este valor a (1): $f(x) = x \cdot \log(4x^2 + 1) - 2x + \text{arc tg } 2x + C$

Como $f(0) = 0$: $f(0) = 0 \cdot \log 1 - 0 + \text{arc tg } 0 + C = C = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = x \cdot \log(4x^2 + 1) - 2x + \text{arc tg } 2x}$$

14.30 Calcular $I = \int x \cdot \text{arc tg } x \, dx$

(Univ. Islas Baleares, 1991)

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{arc tg } x \\ dv = x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1 + x^2}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \Rightarrow I = \text{arc tg } x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \text{arc tg } x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx \qquad \begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \underline{-x^2-1} & 1 \\ -1 & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arc tg } x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \text{arc tg } x - \frac{1}{2}\,(x - \text{arc tg } x)}$$

14.31 **Calcular** $I = \int e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx.$

(Univ. de Islas Baleares)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-x} \\ dv = \cos x\, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^{-x}(-1)\, dx \\ v = \text{sen } x \end{array} \Rightarrow I = e^{-x} \text{sen } x - \int \text{sen } x \cdot e^{-x}(-1)\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-x} \\ dv = -\text{sen } x\, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^{-x}(-1)\, dx \\ v = \cos x \end{array} \Rightarrow I = e^{-x} \text{sen } x - \left(e^{-x} \cos x - \int \cos x \cdot e^{-x}(-1)\, dx\right) =$$

$$= e^{-x}(\text{sen } x - \cos x) - I \ ; \quad 2I = e^{-x}(\text{sen } x - \cos x) \ ;$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} e^{-x}(\text{sen } x - \cos x)}$$

14.32 **Calcular** $I = \int x^2 \cos x\, dx \quad ; \quad J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$

(Univ. de Zaragoza)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos x\, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\, dx \\ v = \text{sen } x \end{array} \Rightarrow I = x^2 \text{sen } x - \int (\text{sen } x)\, 2x\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \text{sen } x\, dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2\, dx \\ v = -\cos x \end{array} \Rightarrow I = x^2 \text{sen } x - \left(2x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2\, dx\right) =$$

$$= x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \int \cos x\, dx = \boxed{x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x}$$

La integral J es inmediata del tipo $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \text{tg } f(x)$: $J = 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2 \sqrt{x}}\, dx = 2 \text{ tg } \sqrt{x}$

Se puede calcular también aplicando el método de sustitución: $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$;

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, dt \Rightarrow J = \int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\, 2\, dt = 2 \text{ tg } t = \boxed{2 \text{ tg } \sqrt{x}}$$

14.33 **Calcular** $I = \int x \cdot e^{4x}\, dx$

(Univ. de Granada)

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{4x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{4} e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} dx = \frac{1}{4}\, x e^{4x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} = \boxed{\frac{1}{4}\, e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right)}$$

14. 34 **Calcular** $I = \int x^2 e^{2x}\, dx$

(Univ. de Cantabria, 1991)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\, dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \Rightarrow I = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\, x^2 e^{2x} - \left(x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\, x e^{2x} + \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} e^{2x} = \boxed{\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)}$$

14.35 **Calcular** $I = \int x^3 e^{-x^2}\, dx$

(Univ. de Madrid)

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = x e^{-x^2} dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\, dx \\ v = \frac{-1}{2} \int e^{-x^2} (-2x)\, dx = \frac{-1}{2}\, e^{-x^2} \end{array} \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2}\, x^2 e^{-x^2} - \int -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} \cdot 2x\, dx = -\frac{1}{2}\, x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\, x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}\, e^{-x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}\, e^{-x^2} (x^2 + 1)}$$

14.36 **Calcular** $I = \int \operatorname{sen}(\log x)\, dx$

(Univ. de Sevilla)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = \text{sen}(\log x) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \cos(\log x)\cdot \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow I = \text{sen}(\log x)\cdot x - \int x\cdot\cos(\log x)\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\cdot\text{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos(\log x) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = -\text{sen}(\log x)\cdot \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow I = x\cdot\text{sen}(\log x) - \Big(\cos(\log x)\,x -$$

$$-\int x\left(-\text{sen}\,x\,(\log x)\,\frac{1}{x}\right)dx\Big) = x\cdot\text{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) - \int \text{sen}(\log x)\,dx \Rightarrow$$

$$I = x\cdot\text{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) - I \Rightarrow 2I = x\cdot\text{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{x}{2}\left(\text{sen}(\log x) - \cos(\log x)\right)}$$

CAPITULO 15

INTEGRALES DEFINIDAS AREAS Y VOLUMENES

FUNCIONES ESCALONADAS.

Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto (cerrado y acotado) de $\mathbf{R}$. Se llama **partición** de I a toda sucesión finita de números reales pertenecientes a I, y estrictamente creciente, siendo el primer término de la sucesión a y el último b.

$$a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Esta partición se simboliza por $P = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$

Los intervalos $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ son llamados los intervalos de la partición.

Llamaremos $\mathscr{P}$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Se dice que la función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ es **escalonada** si existe una partición P de $[a, b]$ tal que f sea constante en el interior de cada uno de los intervalos de la partición.

Una partición P de $[a, b]$ se dice *adaptada o asociada* a la función f, si f es constante en cada uno de los intervalos abiertos de P.

INTEGRAL DE UNA FUNCION ESCALONADA.

Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función escalonada, P una partición de $[a, b]$ adaptada a f y λ_i el valor de f en $]x_{i-1}, x_i[$ se llama **integral de f en el intervalo** $[a, b]$ al número real

$$(x_1 - x_o) \cdot \lambda_1 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \lambda_n$$

y se simboliza por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Este número es independiente de la partición P de $[a, b]$ adaptada a f, sólo depende de f y del intervalo $[a, b]$. La letra x, que no figura en el resultado, puede ser sustituida por otra letra, así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$$

Dada la función $f: [-1, 3] \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \forall x \in [-1, 0] \\ 3 & \forall x \in]0, 1] \\ -1 & \forall x \in [1, 1'3] \\ 1 & \forall x \in]1'3, 2[\\ 3 & \text{para } x = 2 \\ -1'5 & \forall x \in]2, 3] \end{cases}$$

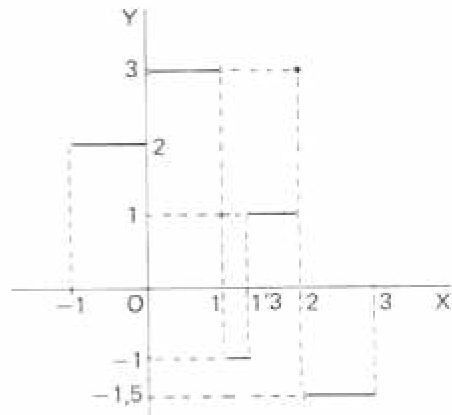
se pide: 1º) Representar gráficamente la función.

2º) Calcular $$I = \int_{-1}^{3} f(x)\, dx$$

1º) La gráfica es la de la figura adjunta.

2º) Por ser una función escalonada:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = [0-(-1)]\cdot 2 + (1-0)\cdot 3 +$$
$$+ (1'3-1)\cdot(-1) + (2-1'3)\cdot 1 +$$
$$+ (3-2)\cdot(-1'5) = 2 + 3 - 0'3 +$$
$$+ 0'7 - 1'5 = 3'9$$



PROPIEDADES: Sean f y g dos funciones escalonadas en $[a, b]$:

— si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$: $$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$$

— si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$: $$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

— si $(\lambda, \mu) \in R^2$: $$\int_a^b \left(\lambda\cdot f(x) + \mu\cdot g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

— $$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

— si f es escalonada en $[a, c]$ y en $[c, b]$,

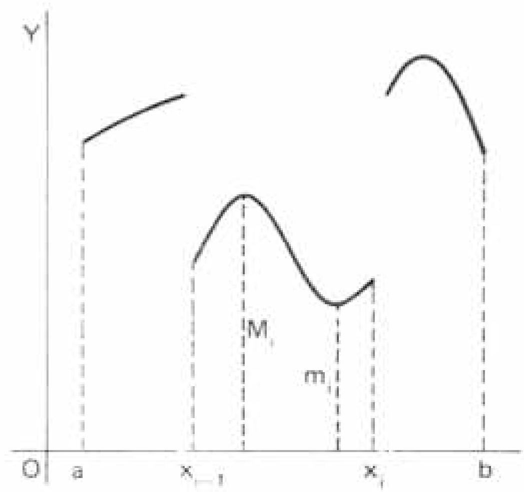
$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

INTEGRAL INFERIOR E INTEGRAL SUPERIOR DE UNA FUNCION ACOTADA. FUNCIONES INTEGRABLES.

Sea la función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, acotada, y $P = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$ una partición de $[a, b]$.

Llamemos m_i y M_i a los extremos inferior y superior de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es decir:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$



A la función f y a la partición P les asociamos dos funciones escalonadas $u: [a, b] \to \mathbf{R}$ y $v: [a, b] \to \mathbf{R}$ definida de la siguiente forma:

$$u(x) = m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$v(x) = M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Las integrales de las funciones escalonadas u y v en el intervalo $[a, b]$ son:

$$s_P = \int_a^b u(x)\, dx = (x_1 - a) \cdot m_1 + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \cdots + (b - x_{n-1}) \cdot m_n$$

$$S_P = \int_a^b u(x)\, dx = (x_1 - a) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot M_2 + \cdots + (b - x_{n-1}) \cdot M_n$$

y se les llama *sumas de Darboux* de la función f asociadas a la partición P.

Al extremo superior del conjunto de los números reales s_P, $(P \in \mathscr{P})$, se le llama **integral inferior** de f en $[a, b]$ y se simboliza por $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$

Al extremo inferior del conjunto de los números reales S_P, $(P \in \mathscr{P})$, se le llama **integral superior** de f en $[a, b]$ y se simboliza por $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$

Se dice que la función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ es **integrable** (en el sentido de Riemann) si la integral inferior de f en $[a, b]$ es igual a la integral superior de f en $[a, b]$, y a su valor común se le llama **integral definida de la función f en el intervalo** $[a, b]$, se simboliza por

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

(La letra x puede ser sustituida por cualquier otra letra)

La función acotada $f: [a, b] \to R$ es **integrable en** $[a, b]$ si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$, tal que existen dos funciones escalonadas u y v sobre $[a, b]$, tales que

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad y \quad \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \epsilon$$

La función acotada $f: [a, b] \to R$ es **integrable** (en el sentido de Riemann) en $[a, b]$ si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$, tal que a toda partición P que cumpla la condición de que la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sea menor que η, se le puedan asociar dos funciones escalonadas u y v sobre $[a, b]$, tales que

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad y \quad \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \epsilon$$

Se llama **suma de Riemann** asociada a la función $f: [a, b] \to R$ y a la partición P de $[a, b]$, a toda expresión de la forma

$$(x_1 - a)\cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\cdot f(\xi_2) + \cdots + (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) + \cdots + (b - x_{n-1})\cdot f(\xi_n)$$

donde $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$.

La función $f: [a, b] \to R$, acotada, es **integrable** en el sentido de Riemann y admite por integral el número real $I = \int_a^b f(x)dx$ si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists P(\text{partición de } [a, b]) \;/\; \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) - I\right| < \epsilon$$

Sea P_η el conjunto de las particiones de $[a, b]$ en las que la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sea menor que η. La función $f: [a, b] \to R$, acotada, es **integrable** en el sentido de Riemann y admite por integral el número real $I = \int_a^b f(x)\,dx$ si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \;/\; \forall P \in P_\eta \quad y \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) - I\right| < \epsilon$$

Se dice, impropiamente, que la función acotada $f: [a, b] \to R$ es **integrable** en el sentido de Riemann si, y sólo si, las sumas de Riemann asociadas a f y a la partición P de $[a, b]$, tienen todas el mismo límite I cuando la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tiende a cero.

Las funciones escalonadas, las funciones monótonas, las funciones continuas, las funciones continuas por secciones son integrables en el sentido de Riemann.

Si la función $f: [a, b] \to R$ es integrable en el sentido de Riemann, considerando la partición de $[a, b]$ en n intervalos de igual amplitud, $\frac{b-a}{n}$:

$$P = \{x_0 = a,\ x_1 = \frac{b-a}{n},\ x_2 = 2\frac{b-a}{n}, \ldots\ldots, x_i = i\,\frac{b-a}{n}, \ldots\ldots, x_n = b\}$$

se tendrá que cuando $n \to \infty$, $\dfrac{b-a}{n} \to 0$, de donde:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

y también: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

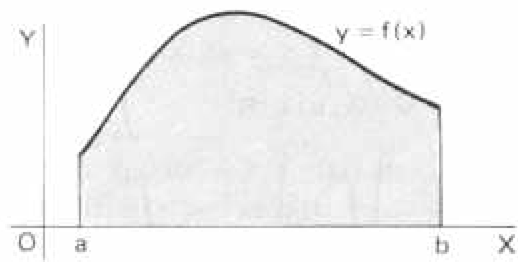
En lo sucesivo diremos "integrable" por "integrable en sentido de Riemann" e "integral" por "integral de Riemann".

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL.

Sea el plano afín real euclídeo y $\{O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal de ejes OX y OY.

Si la función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, es positiva e integrable, el área del recinto del plano determinado por los puntos de coordenadas (x, y) tales que

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right\}$$

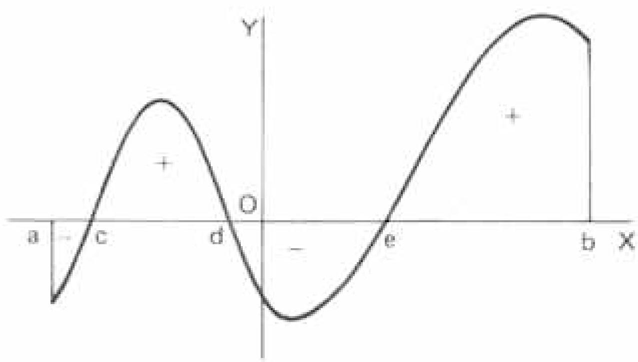


es igual al número real $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Es decir, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área limitada por el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$.

Si la función $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, es negativa, el área limitada por el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$ es igual a

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

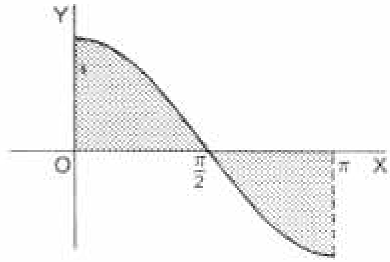


Si la función f no tiene signo constante en $[a, b]$, para hallar el área comprendida entre el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$, es necesario conocer los puntos de corte de la curva con el eje OX y el signo que tiene la función en cada intervalo:

$$\text{Area} = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx$$

Sea calcular el área encerrada por el eje OX, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$, y la curva $y = \cos x$.

De la representación gráfica se deduce:



$$\text{Area pedida} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= \Big[\operatorname{sen} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 2$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Sean **f** y **g** dos funciones integrables en $[a, b]$, $a < b$:

– si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$: $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

– si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$: $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

– si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$: $\quad \displaystyle\int_a^b \big(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

– $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$

– Relación de Chasles: $\quad \displaystyle\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad \forall c \in [a, b]$

– si **f** es integrable en un intervalo compacto y los números reales a, b y c pertenecen a este intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

– $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

– $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

– si **f** es continua y positiva: $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \qquad \forall x \in [a, b]$

– si **f** es una función acotada e integrable en $[a, b]$, se llama *valor medio* de **f** en $[a, b]$ a

$$\boxed{\mu = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$

— **Teorema de la media:** Si f es una función continua en $[a, b]$, existe un $c \in [a, b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)}$$

— $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

— si f es una función periódica de periodo T:

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$$

$$\forall a \in \mathbf{R} \qquad \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx = \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

— si f es una función par y periódica de periodo T: $\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$

— si f es una función par y continua en $[-a, a]$: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

— si f es una función impar y continua en $[-a, a]$: $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

RELACION ENTRE PRIMITIVA E INTEGRAL

Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ una función acotada e integrable en $[a, b]$. A la función F definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

se le llama **función integral de la función f correspondiente al punto a.**

Se verifica: 1º La función F es continua en $[a, b]$.
2º Si f es continua en $[a, b]$, F es derivable en $[a, b]$ y $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

La función F es una primitiva de la función f en $[a, b]$. Es la única primitiva de f que se anula en a:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Regla de Barrow: Si $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ es continua y F es una primitiva cualquiera de f en $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

El cálculo de una integral se lleva, por la regla de Barrow, al cálculo de primitivas.

Calcular $$I = \int_{-1}^{1} (x^3 + \text{sen } x)\,dx$$

(Univ. de Santiago)

La función $f: [-1, 1] \to R$ definida por $f(x) = x^3 + \text{sen } x$ es continua, de donde:

$$I = \left[\frac{x^4}{4} - \cos x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^4}{4} - \cos 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \cos(-1)\right) = \frac{1}{4} - \cos 1 - \frac{1}{4} + \cos 1 = 0$$

Integración por partes: Si u y v son dos funciones derivables y con derivada continua en el intervalo [a, b], se verifica:

$$\boxed{\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = \Big[u(x).v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)\,dx}$$

Calcular $$I = \int_2^3 x\,e^{-2x}\,dx$$

(Univ. de Córdoba)

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-2x} \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} \end{array} \Rightarrow I = \left[-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}\right]_2^3 - \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right)dx = \left(-\frac{1}{2}3\,e^{-6}\right) - \left(-\frac{1}{2}2\,e^{-4}\right) -$$

$$-\left[\frac{1}{4}\,e^{-2x}\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\,(3e^{-6} - 2e^{-4}) - \left(\frac{1}{4}e^{-6} - \frac{1}{4}e^{-4}\right) = -\frac{7}{4}e^{-6} + \frac{5}{4}e^{-4}$$

Integración por cambio de variable: Si f es una función continua en el intervalo [a, b], y g una función biyectiva del intervalo $[\alpha, \beta]$ en el intervalo [a, b], derivable y con derivada continua, definida por $x = g(t)$, y tal que $a = g(\alpha)$ y $b = g(\beta)$, se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\cdot g'(t)\,dt$$

Calcular $$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cdot\text{sen}\,(x^2)\,dx$$

(Univ. de Santiago)

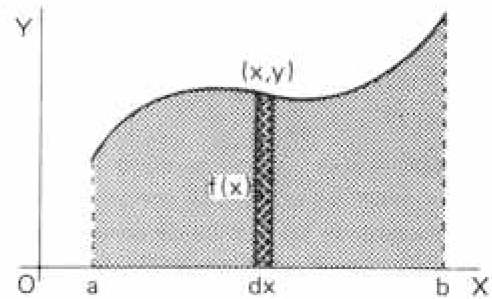
Haciendo el cambio $x^2 = t$: para $x = 0$, $t = 0$; para $x = \sqrt{\pi/2}$, $t = \pi/2$; $2x\,dx = dt$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } t\,dt = \frac{1}{2}\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0)\right) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}\,.$$

AREAS DE FIGURAS PLANAS

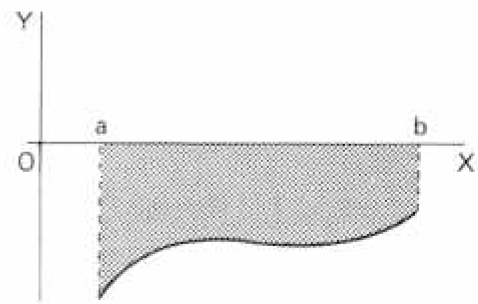
Sea f una función positiva e integrable en el intervalo $[a, b]$. El área del plano comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

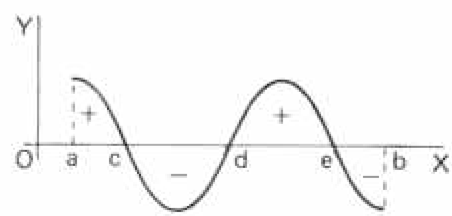


Si f es una función negativa en $[a, b]$:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



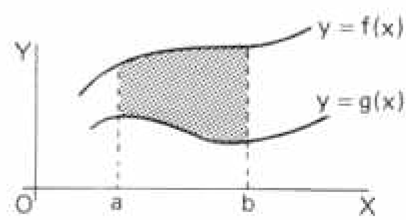
Si f cambia de signo en $[a, b]$, la fórmula (1) da la suma algebraica de las áreas situadas por encima y por debajo del eje OX. En este caso se obtienen las raices de la ecuación $f(x) = 0$ pertenecientes al intervalo $[a, b]$, raices que serán los extremos de los intervalos en que f tiene signo constante, y se hallan las áreas en cada uno de estos intervalos. Se tendrá, en el ejemplo de la figura adjunta:

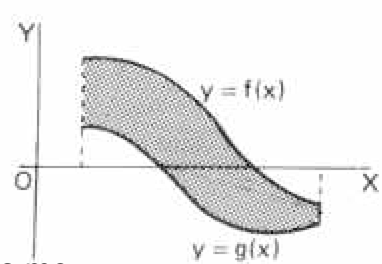


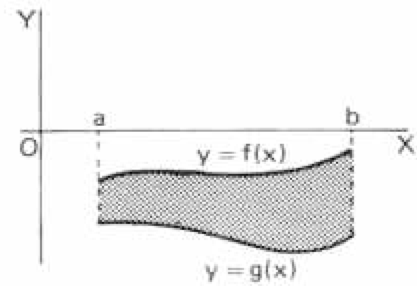
$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx - \int_e^b f(x)\,dx$$

El área comprendida entre las rectas $x = a$, $x = b$ y las gráficas de las funciones f y g, tales que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es igual a

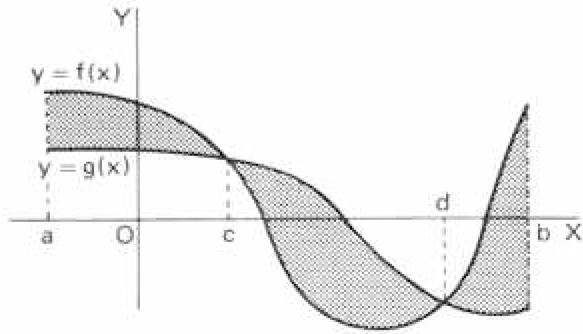
$$\int_a^b \Big(f(x) - g(x) \Big) dx$$





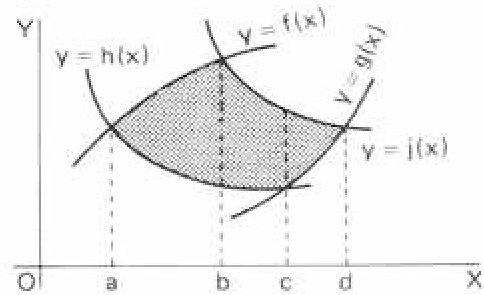


Si $f(x) - g(x)$ no tiene signo constante en $[a, b]$, es decir, las gráficas se cortan, hay que hallar las abscisas de los puntos de corte obteniendo las raices de la ecuación $f(x) - g(x) = 0$ pertenecientes al intervalo $[a, b]$. De esta manera obtendremos los extremos de los intervalos en que $f(x) - g(x)$ tiene signo constante. En el caso de la figura adjunta se tendrá:



$$S = \int_a^c \Big(f(x) - g(x)\Big)dx + \int_c^d \Big(g(x) - f(x)\Big)dx + \int_d^b \Big(f(x) - g(x)\Big)dx$$

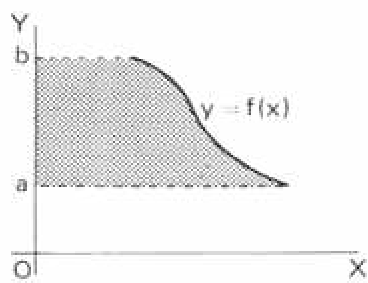
Para hallar el área limitada por varias curvas se obtiene, en primer lugar, las abscisas (u ordenadas) de los puntos del contorno intersección de cada dos curvas, que nos determinarán los extremos de los distintos intervalos de integración. En la figura:



$$S = \int_a^b \Big(f(x) - h(x)\Big)dx + \int_b^c \Big(j(x) - h(x)\Big)dx + \int_c^d \Big(j(x) - g(x)\Big)dx$$

El área del plano comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, las rectas $y = a$, $y = b$ y el eje OY es:

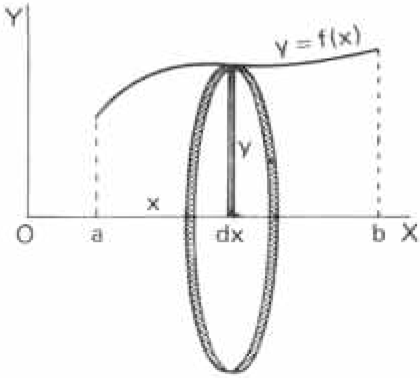
$$S = \int_a^b x\, dy$$



Habrá que expresar x en función de y, pudiendo presentarse todos los casos que hemos considerado anteriormente.

VOLUMENES

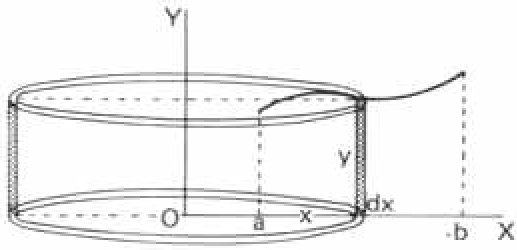
El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OX la parte del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX es:



$$V = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$$

Si el giro se realiza alrededor del eje OY:

$$V = \int_a^b 2\pi x y\,dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$



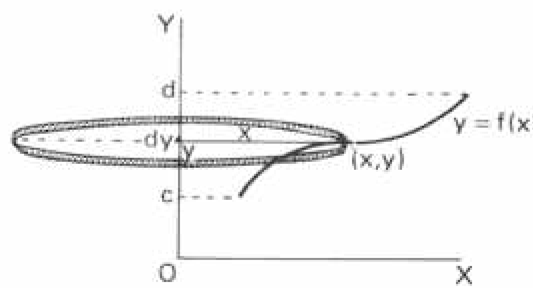
El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OX la parte del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es:

$$V = \pi \int_a^b \Big(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big)\,dx$$

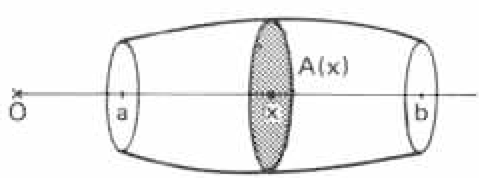
Si el giro se realiza alrededor del eje OY: $$V = 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OY la parte del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $y = c$, $y = d$ y el eje OY es:

$$V = \int_c^d \pi x^2\,dy$$



El volumen de un cuerpo del que se puede conocer el área $A(x)$ de la sección transversal del cuerpo, perpendicular a una dirección dada, en función de la distancia x de dicha sección a un punto dado O es:



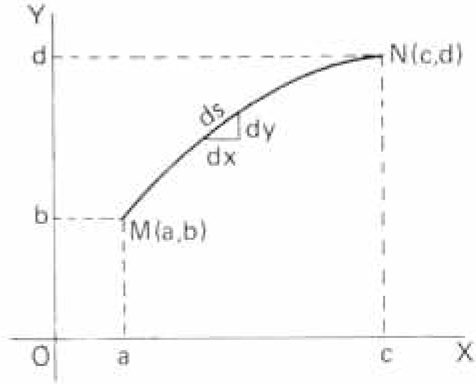
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

siendo a y b las distancias del punto O a las secciones extremas.

LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA PLANA.

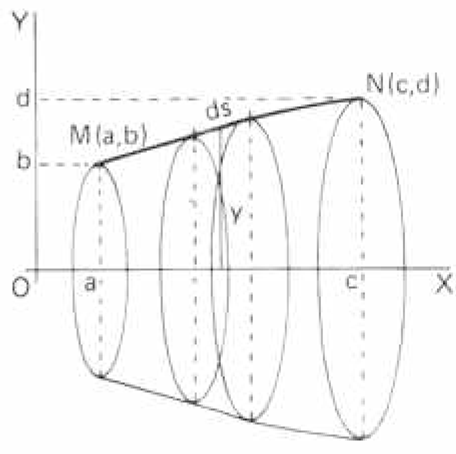
Sea f una función derivable y con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud s del arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $M(a,b)$ y $N(c,d)$ es:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Rightarrow s = \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^c \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ \\ \displaystyle\int_b^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \end{array} \right.$$



AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION

Area de la superficie engendrada al girar 360° alrededor del eje OX el arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $M(a,b)$ y $N(c,d)$:



$$dS = 2\pi y\, ds = 2\pi y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow$$

$$S = 2\pi \int_a^c f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Si el giro se realiza alrededor del eje OY:

$$dS = 2\pi x\, ds \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \displaystyle S = 2\pi \int_a^c x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ \\ \displaystyle S = 2\pi \int_b^d f^{-1}(y) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \end{array} \right.$$

PROBLEMAS

15.1 Calcular $$I = \int_0^1 (2-x)^4\, dx$$

(Univ. de Barcelona, 1991)

Es una integral inmediata:

$$I = -\int_0^1 (2-x)^4\,(-1)\,dx = -\left[\frac{(2-x)^{4+1}}{x+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{(2-1)^5}{5} - \frac{(2-0)^5}{5}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \boxed{\frac{31}{5}}$$

15.2 Representando por $|x|$ el valor absoluto de x, calcular $$I = \int_{-1}^{3} |x|\, dx$$

(Univ. de Madrid)

Considerando que $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_0^3 x\, dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{5}$$

15.3 Calcular $$I = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

(Univ. de Madrid)

La función $f\colon [2, 3] \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ es continua.

$$I = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\log|x^2-1|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\Big(\log(9-1) - \log(4-1)\Big) = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{8}{3}}$$

15.4 Calcular $$I = \int_{-1}^{1}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

(Univ. de Madrid)

La función f: $[-1, 1] \to R$ definida por $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$ es continua.

$$I = \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \log|x-2|\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1 + \log|1-2|\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + \log|-1-2|\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - 3 + \log 1 - \frac{1}{2} - 3 - \log 3 = \boxed{-6 - \log 3}$$

15.5 Calcular $$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \, dx$$

(Univ. de Madrid)

Considerando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: $\quad I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x - 1)\operatorname{sen} x \, dx =$

$$= -2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = -2\left[\frac{(\cos x)^3}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\cos^3 0}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = -2\left(\frac{0}{3} - \frac{1}{3}\right) + 0 - 1 = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

15.6 Calcular $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ no se anula el denominador.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\cos^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}dx = \Big[\log \operatorname{tg} x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \log\sqrt{3} - \log\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \log\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \boxed{\log 3}$$

15.7 Calcular $$I = \int_{4}^{5} \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}dx$$

(Univ. de Valladolid)

No hay ningún valor real de x que anule el denominador.

Como en el denominador sólo hay potencias pares y en el numerador potencias impares, se hace el cambio:

$$x^2 = y \;\Rightarrow\; 2x\,dx = dy\;;\quad \text{para } x = 4,\; y = 16\;;\quad \text{para } x = 5,\; y = 25:$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{16}^{25} \frac{y}{(y+1)(y+4)(y+9)}\,dy$$

Descomponiendo en fracciones simples: $\dfrac{y}{(y+1)(y+4)(y+9)} = \dfrac{A}{y+1} + \dfrac{B}{y+4} + \dfrac{C}{y+9} \Rightarrow$

$$y = A(y+4)(y+9) + B(y+1)(y+9) + C(y+1)(y+4)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para} & y=-1: & -1 = A\cdot 3\cdot 8 \\ \text{"} & y=-4: & -4 = B(-3)\cdot 5 \\ \text{"} & y=-9: & -9 = C(-8)(-5) \end{array}\right| \Rightarrow\; A = \frac{-1}{24}\;;\; B = \frac{4}{15}\;;\; C = \frac{-9}{40} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\left(\frac{\frac{-1}{24}}{y+1} + \frac{\frac{4}{15}}{y+4} + \frac{\frac{-9}{40}}{y+9}\right)dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}\log|y+1| + \frac{4}{15}\log|y+4| - \frac{9}{40}\log|y+9|\right]_{16}^{25} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{24}\log 26 + \frac{4}{25}\log 29 - \frac{9}{40}\log 34\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{24}\log 17 + \frac{4}{25}\log 20 - \frac{9}{40}\log 25\right) =$$

$$= \boxed{\frac{-1}{48}\log\frac{26}{17} + \frac{2}{25}\log\frac{29}{20} - \frac{9}{80}\log\frac{34}{25}}$$

15.8 Calcular $I = \int_0^{\pi} (1+x^2)\cos x\,dx$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

Aplicando el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 1+x^2 \\ dv = \cos x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{array} \Rightarrow\; I = \Big[(1+x^2)\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\operatorname{sen} x\,dx = 0 - \int_0^{\pi} 2x\operatorname{sen} x\,dx$$

volviendo a integrar por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{array} \Rightarrow\; I = -\Big[(2x)(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2(-\cos x)dx =$$

$$= -2\pi + \Big[2(-\operatorname{sen} x)\Big]_0^{\pi} = \boxed{-2\pi}$$

15.9 Sea $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$, y $b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$

Calcular $a+b$ y $a-b$, y obtener los valores de a y b.

(Univ. de Madrid)

Considerando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$:

$$a + b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a - b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 2x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \end{array} \Rightarrow a - b = -\left[\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx =$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = \frac{\pi^2}{8} \\ a - b = \frac{1}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2a = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \boxed{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} \\ \text{Restando: } 2b = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \boxed{\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}} \end{array}$$

15.10 **Siendo** $I(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\,dt$

demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 2.$ *(Univ. de Alicante)*

Aplicando el método de integración por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = t^2 \\ dv = e^{-t}\,dt \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2t\,dt \\ v = -e^{-t} \end{array} \Rightarrow I(x) = \left[-t^2\cdot e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})\,2t\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2t \\ dv = -e^{-t}dt \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2dt \\ v = e^{-t} \end{array} \Rightarrow I(x) = -x^2e^{-x} - \left(\left[2t\cdot e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,2\,dt\right) =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - \left[2e^{-t}\right]_0^x = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2 = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x} + 2 \qquad (1)$$

Este límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'Hopital, dos veces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x - 2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x} = \left(\frac{-2}{\infty}\right) = 0$$

evando este valor a (1) resulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 0 + 2 = \boxed{2}$

15.11 Sabemos que $f(a) = f(b)$ para una cierta función f, y también que su derivada f' es continua en R. Hallar el valor de

$$I = \int_a^b f'(x)\, dx .$$

(Univ. de Alicante)

Si f' es continua, f es una primitiva de f', de donde: $\quad I = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a) = \boxed{0}$

15.12 Sabiendo que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, ¿podemos asegurar que $a = b$?

(Univ. de León)

Si la función f es la función nula, cualquiera que sean a y b, se verificará la igualdad del enunciado.

Si f es una función impar, es decir, se verifica que $f(-x) = -f(x)$, se tiene: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

En efecto, haciendo el cambio $x = -t$: $dx = -dt$; para $x = a$, $t = -a$; para $x = -a$, $t = a$, y como $f(-t) = -f(t)$:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{-a} f(-t)\,(-dt) = -\int_{a}^{-a} [-f(t)]\, dt = -\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = -I \;\Rightarrow\; 2I = 0 \;\Rightarrow\; I = 0$$

Si f es una función cuya curva es simétrica respecto del punto $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ también se verificaría la igualdad del enunciado sin que fuera $a = b$.

15.13 Dada la función $f: [0, 3] \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$ comprobar la verificación del teorema del valor medio del cálculo integral.

(Univ. de Santiago)

Como la función $f: [0, 3] \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, es continua, comprobemos que existe un punto $c \in [0, 3]$ tal que

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx = (3-0)\cdot\sqrt{c+1}$$

$$\int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$(3-0)\sqrt{c+1} = \frac{14}{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{c+1} = \frac{14}{9}\;;\quad c+1 = \frac{14^2}{9^2} = \frac{196}{81}\;;\quad c = \frac{196}{81} - 1 = \frac{115}{81} \in [0, 3]$$

15.14 Calcular

$$E = \lim_{a \to +\infty} \int_a^{a+1} \frac{\log x}{e^x}\, dx$$

(Univ. de Santiago)

La función $f: R_+^* \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{\log x}{e^x}$ es continua. Según el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\int_a^{a+1} \frac{\log x}{e^x}\, dx = (a+1-a)\cdot\frac{\log(a+h)}{e^{a+h}}, \quad \text{siendo } 0 < h < 1, \quad \text{de aquí:} \quad E = \lim_{a\to+\infty} \frac{\log(a+h)}{e^{a+h}},$$

que es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{a\to+\infty} \frac{\frac{1}{a+h}}{e^{a+h}} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{(a+h)e^{a+h}} = \left(\frac{1}{(+\infty)e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty}\right) = \boxed{0}$$

15.15 **Hallar el valor de la suma:** $S = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \cdots + 100\, I_{100}$

siendo $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx$

(Univ. del País Vasco)

$$I_n = \left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\operatorname{sen} 0 = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

haciendo $n = 4h$, $n = 4h+1$, $n = 4h+2$, $n = 4h+3$:

$$I_{4h} = \frac{1}{4h}\operatorname{sen}\left(4h\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h}\operatorname{sen}(2h\pi) = \frac{1}{4h}\cdot 0 = 0$$

$$I_{4h+1} = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\left((4h+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\left(2h\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4h+1}\cdot 1 = \frac{1}{4h+1}$$

$$I_{4h+2} = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}\left((4h+2)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}(2h\pi+\pi) = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{4h+2}\cdot 0 = 0$$

$$I_{4h+3} = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\left((4h+3)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\left(2h\pi+\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{4h+3}(-1) = \frac{-1}{4h+3}$$

de donde: $(4h+1)I_{4h+1} + (4h+2)I_{4h+2} + (4h+3)I_{4h+3} + (4h+4)I_{4h+4} =$

$$= (4h+1)\frac{1}{4h+1} + (4h+2)\cdot 0 + (4h+3)\frac{-1}{4h+3} + (4h+4)\cdot 0 = 1+0-1+0 = 0$$

$$S = (I_1 + 2I_2 + 3I_3 + 4I_4) + \cdots + (79\, I_{97} + 98\, I_{98} + 99\, I_{99} + 100\, I_{100}) =$$

$$= (1+0-1+0) + \cdots + (1+0-1+0) = \boxed{0}$$

15.16 **Calcular el área encerrada por la curva**

$$y = x^2 - 4x$$

y la recta

$$y = 2x - 5.$$

(Univ. de Málaga)

Representemos la parábola $y = x^2 - 4x$:

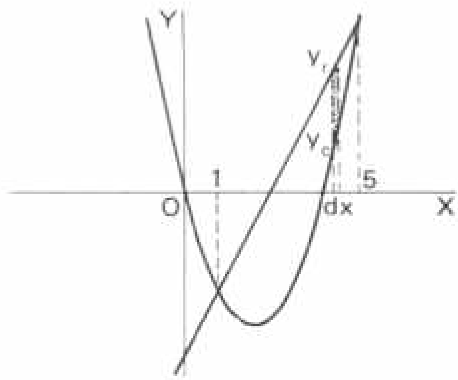
Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \; ; \; x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Máximos y mínimos:

$y' = 2x - 4$; $y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$, $x = 2$

$y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ existe un mínimo en el punto $(2, -4)$



Corte de la parábola y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - 5 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 - 4x = 2x - 5 \; ; \; x^2 - 6x + 5 = 0 \; ;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow y = 5 \\ 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

El área del rectángulo tramado en la figura será:

$$dS = (y_{recta} - y_{curva})\, dx = \big((2x-5) - (x^2 - 4x)\big)\, dx = (-x^2 + 6x - 5)\, dx \Rightarrow$$

$$S = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x \right]_1^5 = \left(-\frac{125}{3} + 3 \cdot 25 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = \boxed{\frac{32}{3}}$$

15.17 **Determinar el área del recinto limitado por la parábola**

$$\mathbf{y^2 = 2x}$$

y la recta que une los puntos $A(2, -2)$ y $B(4, 2\sqrt{2})$.

(Univ. de Madrid)

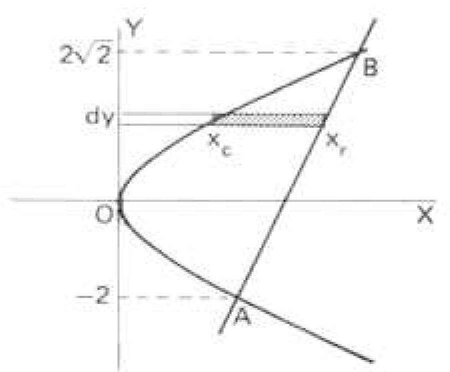
El dibujo de la parábola $y^2 = 2x$ no ofrece dificultad. Pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene en este punto un mínimo de la x, ya que $x' = y$, siendo $x'' = 1 > 0$.

Los puntos A y B están sobre la parábola, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación de la parábola.

La ecuación de la recta AB es:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-(-2)}{2\sqrt{2}-(-2)} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} y + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$



Area pedida: $dS = (x_r - x_c)\, dy \Rightarrow S = \int_{-2}^{2\sqrt{2}} (x_r - x_c)\, dy = \int_{-2}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} y + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2} y^2 \right) dy$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}+1} \frac{y^2}{2} + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} y - \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} (2\sqrt{2}) - \frac{1}{6} (2\sqrt{2})^3 \right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,\frac{(-2)^2}{2}+\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}(-2)-\frac{1}{6}(-2)^3\right)=\frac{4+8\sqrt{2}+8}{\sqrt{2}+1}-\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{2-8-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{18+12\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\frac{(18+12\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\frac{6\sqrt{2}+6}{2-1}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\boxed{\frac{10\sqrt{2}+14}{3}}$$

15.18 **Hallar el área encerrada por**

$$y^2+2y+x-3=0 \quad \text{e} \quad y=x+1$$

(Univ. de La Laguna)

Dibujo de la parábola $x=-y^2-2y+3=0$:

Corte con los ejes: $x=0 \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Rightarrow y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$;

$y=0 \Rightarrow x=3$

Máximos y mínimos (de la x): Derivando respecto de y:

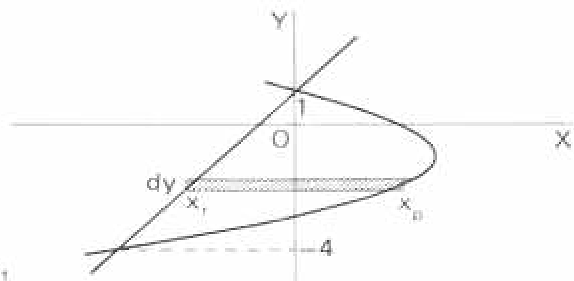
$$\left.\begin{array}{l} x'=-2y-2,\quad x'=0 \Rightarrow -2y-2=0 \Rightarrow y=-1; \\ x''=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ existe un máximo de la x en el punto $(4,-1)$.

Punto de corte de la recta y la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y=x+1 \\ y^2+2y+x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)^2+2(x+1)+x-3=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5.$$

La recta y la parábola se cortan en los puntos $(0,1)$ y $(-5,-4)$.

Area pedida: El área del rectángulo rayado es (considerando que x_r es negativa):



$$dA=(x_p-x_r)dy=\Big((-y^2-2y+3)-$$

$$-(y-1)\Big)dy=(-y^2-3y+4)dy \Rightarrow$$

$$A=\int_{-4}^{1}(-y^2-3y+4)dy=\left[-\frac{y^3}{3}-3\,\frac{y^2}{2}+4y\right]_{-4}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{3}{2}\cdot 1^2+4\cdot 1\right)-\left(-\frac{1}{3}(-4)^3-\frac{3}{2}(-4)^2+4(-4)\right)=\boxed{\frac{125}{6}}$$

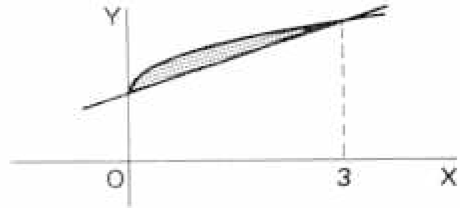
15.19 **Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:**

$$f(x)=1+\frac{x}{3} \quad ; \quad g(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

(Univ. de Barcelona)

Hallemos los puntos de intersección de ambas gráficas resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \dfrac{x}{3} \\ y = (x+1)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right| \quad 1 + \frac{x}{3} = (x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow$$



$$(1 + \frac{x}{3})^2 = x + 1 \ ; \quad 1 + \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{3} = x + 1 \ ;$$

$$9 + x^2 + 6x = 9x + 9 \ ; \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad g''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} < 0 \quad \forall x \in [0, 3] \quad \Rightarrow$$

la función g es cóncava en el intervalo [0, 3].

$$\text{Area pedida} = \int_0^3 |g(x) - f(x)|\,dx = \int_0^3 \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{3}\right)dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - x - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{1}{6}x^2\right]_0^3 = \left(\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - 3 - \frac{1}{6}9\right) - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} - 0 - 0 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

15.20 **Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones**

$$\mathbf{y = 6x - x^2 \quad , \quad y = x^2 - 2x}$$

(Univ. de Castilla – La Mancha)
(Univ. de La Laguna)
(Univ. de Extremadura)

Dibujo de la parábola $y = 6x - x^2$:

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow 6x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 6$

Máximos y mínimos: $y' = 6 - 2x$; $y' = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0, \ x = 3$; $y'' = -2 < 0 \Rightarrow$ existe un máximo en el punto (3, 9).

Dibujo de la parábola $y = x^2 - 2x$:

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 2$

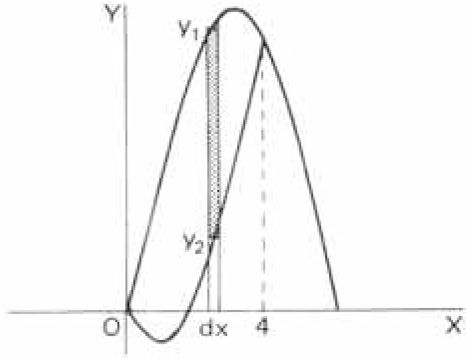
Máximo y mínimos: $y' = 2x - 2$; $y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0, \ x = 1$; $y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ existe un mínimo en el punto (1, – 1).

Puntos de corte de ambas curvas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right| \quad 6x - x^2 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \ x = 4$$

las curvas se cortan en los puntos (0, 0) y (4, 8)



Cálculo del área pedida:

$$dA = (y_1 - y_2)\,dx = ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx =$$

$$= (-2x^2+8x)dx \Rightarrow A = \int_0^4 (-2x^2+8x)dx = \left[-2\cdot\frac{x^3}{3}+8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\frac{2}{3}\cdot 4^3+4\cdot 4^3-0 = \boxed{\frac{64}{3}}$$

15.21 **Calcular el área de la figura plana situada en el primer cuadrante y limitada por las curvas:**

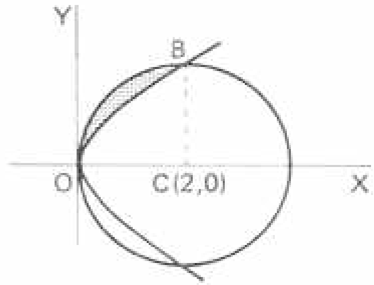
$$x^2+y^2=4x \; ; \quad y^2=2x$$

(Univ. del País Vasco)

La ecuación $x^2+y^2-4x=0$ es la de la circunferencia de centro el punto (2, 0) y radio 2.

El dibujo de la parábola $y^2=2x$ no ofrece dificultad.

Puntos de corte de ambas curvas:



$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=4x \\ y^2=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x=4x;\; x^2-2x=0\;; \quad x=0,\; x=2$$

Cálculo del área pedida:

El área pedida es igual a la cuarta parte del área del circulo de radio 2 menos el área del triángulo mixtilíneo OCB determinado por las rectas $y=0$, $x=2$ y el arco de parábola OB:

$$\text{Area} = \frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\int_0^2 y\,dx = \pi-\int_0^2\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}dx = \pi-\sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = \pi-\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{1+\frac{1}{2}}-0\right) =$$

$$= \pi-\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}2\cdot\sqrt{2} = \boxed{\pi-\frac{8}{3}}$$

15.22 **Dada la curva** $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$

hallar b, (b > 3), tal que el área comprendida entre la curva, el eje OX y las ordenadas correspondientes a x = 3 y x = b sea $\log\sqrt[4]{(b+2)^3}$.

(Univ. de Valladolid)

$$y=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\;,\quad \forall x\geq 3,\; x-1>0,\; x+2>0,\; x-2>0 \Rightarrow y>0$$

El área comprendida entre la curva, el eje OX y las rectas $x=3$ y $x=b$ es

$$S=\int_3^b\frac{x-1}{x^2-4}dx$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow x-1=A(x-2)+B(x+2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para} \quad x = 2: & 1 = 4B \\ \quad " \quad x = -2: & -3 = -4A \end{array}\right| \Rightarrow \quad A = \frac{3}{4}\ ; \quad B = \frac{1}{4}$$

$$S = \int_3^b \left(\frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} \right) dx = \left[\frac{3}{4} \log (x+2) + \frac{1}{4} \log (x-2) \right]_3^b =$$

$$= \frac{3}{4} \log (b+2) + \frac{1}{4} \log (b-2) - \frac{3}{4} \log 5 - \frac{1}{4} \log 1 = \log (b+2)^{\frac{3}{4}} + \log (b-2)^{\frac{1}{4}} - \log 5^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \log \frac{(b+2)^{\frac{3}{4}} (b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}}$$

Según el enunciado: $\log \dfrac{(b+2)^{\frac{3}{4}}(b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}} = \log (b+2)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \dfrac{(b+2)^{\frac{3}{4}} (b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}} = (b+2)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow$

(al ser $b+2 \neq 0$, ya que $b > 3$)

$$(b-2)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow (b-2)^{\frac{1}{4}} = (5^3)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow b-2 = 5^3 \Rightarrow \boxed{b = 127}$$

15.23 **Calcular el área encerrada por la gráfica de** $y = \dfrac{1}{4+x^2}$
el eje de abscisas y las rectas $x = 2\sqrt{3}$ **y** $x = 2$.

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

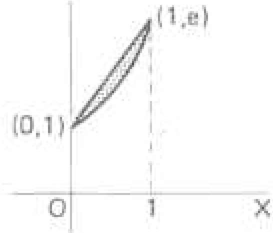
$\forall x \in R \quad 4 + x^2 > 0 \Rightarrow$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ es continua y positiva:

$$\text{Area pedida} = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{2}{4} \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[\text{arc tg} \frac{x}{2} \right]_2^{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2} (\text{arc tg} \sqrt{3} - \text{arc tg } 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\frac{\pi}{24}}$$

15.24 **Hallar el área limitada por la curva** $y = e^x$
y la cuerda de la curva que une los puntos de abscisas 0 y 1.

(Univ. de Zaragoza)



Para $x = 0$: $y = e^0 = 1$; para $x = 1$: $y = e$.

$y' = e^x$; $y'' = e^x > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.

La cuerda que une los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ está por encima de la curva.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ es :

$$\frac{y-1}{e-1} = \frac{x-0}{1-0} \Rightarrow y = (e-1)x+1$$

El área pedida será:

$$A = \int_0^1 (y_r - y_c)\,dx = \int_0^1 \left((e-1)x + 1 - e^x\right)dx = \left[(e-1)\frac{x^2}{2} + x - e^x\right]_0^1 =$$

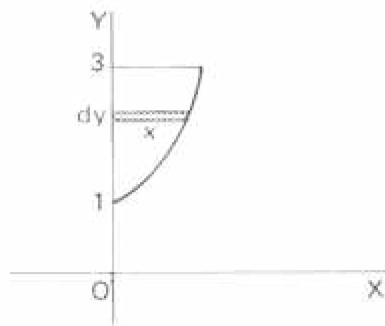
$$= \left((e-1)\frac{1^2}{2} + 1 - e^1\right) - \left((e-1)\frac{0}{2} + 0 - e^0\right) = \frac{e-1}{2} + 1 - e + 1 = \boxed{2 - \frac{e+1}{2}}$$

15.25 **Hallar el área de la región limitada por el eje de ordenadas, la recta $y = 3$, y la curva $y = e^x$.**

(Univ. de Valladolid, 1991)

$y' = e^x$; $y'' = e^x > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.

Para $x = 0$: $y = e^0 = 1$



Area pedida:

$$\left.\begin{array}{l} dS = x\,dy \\ y = e^x \Rightarrow x = \log y \end{array}\right\} \Rightarrow dS = \log y \cdot dy$$

$$S = \int_1^3 \log y \cdot dy$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l|l} u = \log y & du = \frac{1}{y}\,dy \\ dv = dy & v = y \end{array}\right. \Rightarrow S = \left[(\log y)\,y\right]_1^3 - \int_1^3 y\cdot\frac{1}{y}\,dy = \left(3\log 3 - 1\cdot\log 1\right) - \left[\,y\,\right]_1^3 =$$

$$= 3\log 3 - (3-1) = \boxed{3\log 3 - 2}$$

15.26 **Hallar el área encerrada por las líneas cuyas ecuaciones son:**

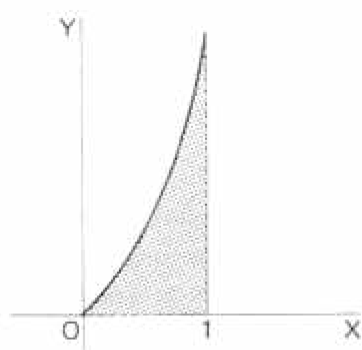
$$y = xe^x\ ; \quad y = 0\ ; \quad x = 1$$

(Univ. de las Palmas de Gran Canaria)

$f(x) = xe^x$; $f'(x) = 1\cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

la función es creciente en $[0, 1]$ y como $f(0) = 0$: $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, 1]$.

$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$ la función es convexa en $[0, 1]$.



Area pedida:

$$A = \int_0^1 x\,e^x\,dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \Rightarrow A = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = \boxed{1}$$

15.27 **Hallar el área limitada por la curva** $y = x \cdot e^{-x^2}$ **el eje de abscisas y la recta** $x = a$**, siendo a la abscisa del máximo de la curva.**

(Univ. de Alicante)

Hallemos la abscisa del máximo: $f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) =$

$$= (1-2x^2)e^{-x^2} ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 ; \quad x^2 = \frac{1}{2} ; \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -4x \cdot e^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = 2x(2x^2-3)e^{-x^2}$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\right)e^{-\frac{1}{2}} < 0 \Rightarrow \text{la función tiene un máximo para } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{-1}{2} - 3\right)e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow \text{la función tiene un mínimo para } x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

En el intervalo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f'(x) \geq 0$, la función es creciente, y como $f(0) = 0$, la función es positiva en dicho intervalo.

El área pedida es: $A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}(-2x)\, dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-0}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$$

15.28 **Hallar el área encerrada por la curva** $y = \log x$ **el eje OX y la recta** $x = e$**.**

(Univ. de Extremadura)

$y = 0 \Rightarrow \log x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ para todo $x \in [1, e] \Rightarrow$ la curva es creciente en el intervalo $[1, e]$, y como $f(1) = 0$, la función es positiva en el intervalo $[1, e]$. También es continua en dicho intervalo.

Area pedida: $A = \int_1^e \log x\, dx$ $\qquad \left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow$

$$A = \left[x \log x\right]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\, dx = e \log e - 1 \cdot \log 1 - \left[x\right]_1^e = e - (e-1) = \boxed{1}$$

15.29 **Hallar el área comprendida entre la curva:** $y = \log(x+5)$

y las rectas: $y = 0 \;;\; x = -\dfrac{9}{2} \;;\; x = 1$

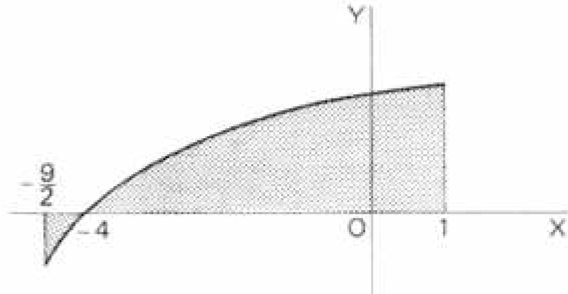
(Univ. de Córdoba)

$y = 0 \Rightarrow \log(x+5) = 0,\quad x+5 = 1,\quad x = -4$

$f(-\frac{9}{2}) = \log(-\frac{9}{2}+5) = \log 0'5 \;;\; f(1) = \log 6$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+5} > 0$ para todo $x \in \left[-\dfrac{9}{2}, 1\right]$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+5)^2} < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava



Area pedida: $A = -\displaystyle\int_{-\frac{9}{2}}^{-4} \log(x+5)\,dx + \int_{-4}^{1} \log(x+5)\,dx$

Calculemos, por el método de integración por partes, $I = \displaystyle\int \log(x+5)\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = \log(x+5) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{x+5} \\ v = x \end{array} \Rightarrow I = x\cdot\log(x+5) - \int \frac{x}{x+5}\,dx = x\cdot\log(x+5) - \int \frac{(x+5)-5}{x+5}\,dx =$$

$$= x\cdot\log(x+5) - \int\left(1 - \frac{5}{x+5}\right)dx = x\cdot\log(x+5) - x + 5\log(x+5) = (x+5)\log(x+5) - x$$

de donde $A = -\Big[(x+5)\log(x+5) - x\Big]_{-\frac{9}{2}}^{-4} + \Big[(x+5)\log(x+5) - x\Big]_{-4}^{1} =$

$$= -\big((1\cdot\log 1 + 4) - (0'5\log 0'5 + 4'5)\big) + (6\log 6 - 1) - (1\cdot\log 1 + 4) =$$

$$= \boxed{-4'5 + 0'5\log 0'5 + 6\log 6}$$

15.30 **Hallar el área limitada por las curvas** $y = \log x \;;\; y = 2$ **y los ejes de coordenadas.**

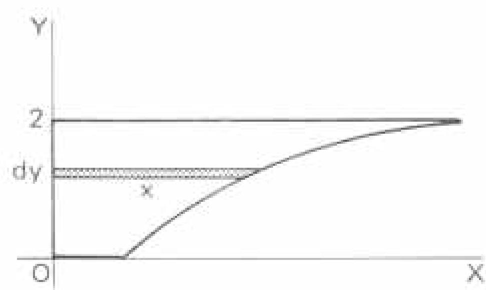
(Univ. de León)

$y = 0 \Rightarrow \log x = 0,\quad x = 1$

$y' = \dfrac{1}{x} > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ la curva es creciente

$y'' = \dfrac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava

La parte del plano cuya área nos piden es aproximadamente la de la figura.



Cálculo del área pedida:

$$\left.\begin{array}{l} dA = x \cdot dy \\ y = \log x \Rightarrow x = e^y \end{array}\right\} \Rightarrow dA = e^y dy \Rightarrow A = \int_0^2 e^y dy = \left[e^y\right]_0^2 = e^2 - e^0 = \boxed{e^2 - 1}$$

15.31 **Calcular el área de la zona del plano limitada por las rectas**

$$y = 0 \; ; \quad x = 1 \; ; \quad x = e$$

y la gráfica $y = (\log x)^2$ *(Univ. de Barcelona)*

La función definida por $f(x) = (\log x)^2$ es continua para $x > 0$.

$f(1) = (\log 1)^2 = 0 \; ; \; f(e) = (\log e)^2 = 1$

$f'(x) = 2(\log x) \cdot \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ para todo $x \in [1, e] \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo $[1, e]$,

y como $f(1) = 0$, la función es positiva en dicho intervalo.

Area pedida: $$S = \int_1^e (\log x)^2 \, dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l|l} u = (\log x)^2 & du = 2(\log x)\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right. \Rightarrow S = \left[(\log x)^2 x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\log x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= (\log e)^2 e - (\log 1)^2 \cdot 1 - 2\int_1^e \log x \, dx = e - 2\int_1^e \log x \, dx$$

integrando de nuevo por partes:

$$\left.\begin{array}{l|l} u = \log x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right. \Rightarrow S = e - 2\left(\left[(\log x)x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x \, dx\right) =$$

$$= e - 2\left((\log e)e - (\log 1)\cdot 1 - \int_1^e dx\right) = e - 2e + 2\left[x\right]_1^e = -e + 2(e-1) = \boxed{e - 2}$$

15.32 **Hallar el área limitada por la gráfica de** $y = -\log x^2$

y las rectas: $x = e$ **y** $x = e^2$ *(Univ. de Córdoba)*

La función definida por $f(x) = -\log x^2$ es continua en el intervalo $[e, e^2]$.

$f'(x) = -\dfrac{2x}{x^2} = -\dfrac{2}{x} < 0$ para todo $x \in [e, e^2] \Rightarrow$ la función es decreciente en este intervalo,

y como $f(e) = -\log e^2 = -2\log e = -2$, la función es negativa en dicho intervalo.

Area pedida: $$A = -\int_e^{e^2} (-\log x^2) \, dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = -\log x^2 \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = -\dfrac{2}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow A = \left[x \log x^2\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{2}{x}\cdot x\,dx = e^2 \log e^4 - e\log e^2 - \left[2x\right]_e^{e^2} =$$

$$= 4e^2 - 2e - (2e^2 - 2e) = \boxed{2e^2}$$

15.33 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x\cdot\log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje OX, desde $x = 0$ hasta $x = b$, siendo b la abscisa del mínimo de la función.

(Univ. de León)
(Univ. de Madrid)

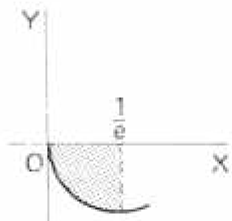
$$f(x) = x\cdot\log x \Rightarrow f'(x) = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1\ ;\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \log x + 1 = 0\ ;$$

$$\log x = -1\ ;\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow \text{la función presenta un mínimo en el punto } \left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right).$$

Veamos la posición de la curva en un entorno de 0:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$



En el intervalo $[0, e^{-1}]$, $f(x) \leq 0$, de donde: $A = -\int_0^{e^{-1}} x\cdot\log x\,dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \Rightarrow A = -\left(\left[(\log x)\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^{-1}} - \int_0^{e^{-1}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= -(\log e^{-1})\,\frac{e^{-2}}{2} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\log x\right) + \int_0^{e^{-1}}\frac{1}{2}x\,dx = 1\cdot\frac{e^{-2}}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}(x\log x) + \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{e^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2} + 0\cdot 0 + \frac{e^{-2}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}e^{-2}}$$

15.34 **Determinar el área acotada por** $f(x) = x^2\cdot\log x$ **su tangente en el punto de abscisa $x = e$ y el eje OX.**

(Univ. de Madrid)

La función definida por $f(x) = x^2\log x$ es continua para $x > 0$.

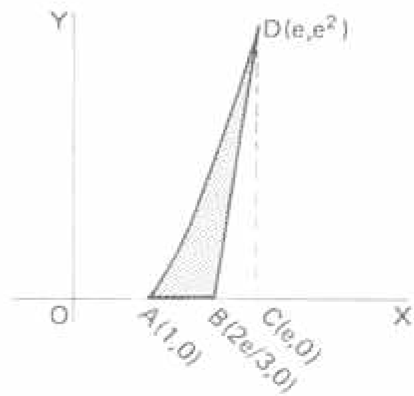
Corte de la curva con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \log x = 0 \begin{cases} x^2 = 0, & x = 0 \\ \log x = 0, & x = 1 \end{cases}$

$f'(x) = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$; $f''(x) = 2\log x + 1 + x\,\frac{2}{x} = 2\log x + 3 > 0$ en el intervalo $[1, e] \Rightarrow$ la función es convexa, la curva queda por encima de la tangente.

$f(e) = e^2 \cdot \log e = e^2$

Ecuación de la tangente en el punto (e, e^2):

$f'(x) = x(2\log x + 1)$; $f'(e) = e(2\log e + 1) = 3e \Rightarrow$ la ecuación de la tangente en el punto (e, e^2) es: $\quad y - e^2 = 3e(x - e)$.



Area pedida: Es igual al área del triángulo mixtilíneo ADC menos el área del triángulo BDC.

Area del triángulo mixtilíneo ADC:

$$S = \int_1^e y\,dx = \int_1^e x^2 \log x \, dx$$

integrando por partes:

$$\begin{array}{l|l} u = \log x & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx & v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \Rightarrow$$

$$S = \left[\frac{1}{3}x^3 \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}e^3 \log e - \frac{1}{3}1^3 \log 1 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

La tangente $y = 3ex - 2e^2$ corta al eje OX en el punto $\left(\frac{2}{3}e, 0\right)$.

Area del triángulo BCD $= \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{2}{3}e\right)e^2 = \frac{1}{6}e^3$

Area pedida $= \frac{1}{9}(2e^3 + 1) - \frac{1}{6}e^3 = \boxed{\frac{1}{18}(e^3 + 2)}$

15.35 **Dada la función $f: R^*_+ \to R$ definida por $f(x) = \frac{\log x}{x}$ hallar el área determinada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y la recta $x = e$.**

(Univ. de Islas Baleares)
(Univ. de Santiago)

$y = 0 \Rightarrow \frac{\log x}{x} = 0$; $\log x = 0$; $x = 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} > 0 \text{ para todo } x \in [1, e[\Rightarrow$$

la función es creciente en este intervalo, y como $f(1) = 0$, la función es positiva en $]1, e[$. De donde:

$$\text{Area pedida:} \quad A = \int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^e (\log x)^1 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\log e)^2}{2} - \frac{(\log 1)^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

15.36 **Sean** $\quad f(x) = -x^2 - 4x \; ; \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2.$

Calcular el área del dominio, conjunto de puntos M(x, y) tales que $-2 \leqslant x \leqslant 0 \; ; \; g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$

(Univ. de Córdoba)

Representemos ambas curvas en el intervalo $[-2, 0]$.

$f(x) = -x^2 - 4x \; : \quad x = 0 \Rightarrow y = 0 \; ; \quad x = -2 \Rightarrow y = 4$

$f'(x) = -2x - 4 \; ; \; f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0; \; x = -2 \; ; \; \forall x \in]-2, 0], \; f'(x) \leqslant 0 \quad \Rightarrow$

la curva es decreciente.

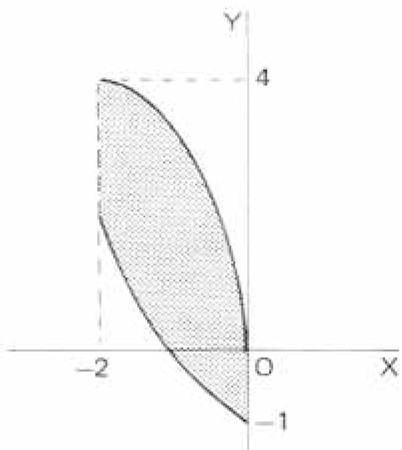
$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava.

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = 2^{-x} - 2 \; : \quad x = 0 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1 \; ; \quad x = -2 \Rightarrow y = 2^2 - 2 = 2$

$g'(x) = 2^{-x} (\log 2)(-1) = -2^{-x} \cdot \log 2 < 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \Rightarrow$ la curva es decreciente.

$g''(x) = -2^{-x} (\log 2)^2 (-1) = 2^{-x} (\log 2)^2 > 0 \Rightarrow$ la curva es convexa.

Con los datos obtenidos podemos dibujar ambas curvas en el intervalo $[-2, 0]$, comprobando que no se cortan en dicho intervalo.



El área pedida será:

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 - 4x - 2^{-x} + 2)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - \frac{2^{-x}}{\log 2}(-1) + 2x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} - \left(-\frac{-8}{3} - 4 \cdot 2 + \frac{2^2}{\log 2} - 4\right) = \boxed{\frac{-3}{\log 2} + \frac{28}{3}}$$

15.37 **Calcular el área del plano comprendida entre la curva**

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$

y la recta $\quad y = 1.$

(Univ. de Barcelona)

Hallemos los puntos de corte de la curva y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2+1}{x^4+1} \\ y = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x^4+1} = 1 \quad \Rightarrow x^2+1 = x^4+1\ , \quad x^4 - x^2 = 0\ , \quad x^2(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ll} x^2 = 0\ , & x = 0 \\ x^2 - 1 = 0\ , & x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Para $-1 \leqslant x \leqslant 1$: $\quad x^2 \leqslant 1 \;$ y $\; x^4 \leqslant x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2+1}{x^4+1} \geqslant \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad \Rightarrow$

la ordenada de la curva es igual o mayor que la ordenada de la recta. Como además, la curva es simétrica respecto del eje OY, ya que $f(-x) = f(x)$:

Area pedida: $\quad S = 2\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} - 1\right) dx = 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx - 2$

La descomposición en fracciones simples de esta función racional es muy complicada. Calcularemos la integral haciendo el siguiente cambio de variable:

$t = x - \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad$ para $x \to 0^+$, $\; t \to -\infty$; para $x = 1$, $\; t = 0$; $\quad dt = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$;

$t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$; $\quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + 2$. $\quad$ Dividiendo numerador y denominador por x^2:

$$S = 2\int_0^1 \frac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}\,dx - 2 = 2\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2+t^2} - 2 = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt - 2 =$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{arc tg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^0 - 2 = \sqrt{2}\,(\text{arc tg}\,0 - \text{arc tg}\,(-\infty)) - 2 = \boxed{\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2}.$$

15.38 **Calcular el área del recinto comprendido entre la parábola**

$$y = \frac{x^2}{4}$$

y la recta $\qquad y = x.$

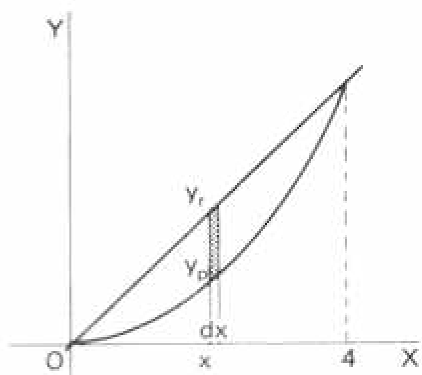
Calcular asimismo el volumen generado por dicho recinto al girar 360° alrededor del eje OX.

(Univ. de Valencia)

Puntos de corte de la parábola y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = x \end{array}\right| \quad x = \frac{x^2}{4}\ ;\ x^2 - 4x = 0\ ;\ x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

$$f(0) = 0\ ;\ f(4) = 4$$



$$S = \int_0^4 (y_{recta} - y_{parábola})\,dx = \int^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{4\cdot 3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Cálculo del volumen: $\quad dV = \pi y_r^2\, dx - \pi y_p^2\, dx = \pi\left(y_r^2 - y_p^2\right)dx = \pi\left(x^2 - \dfrac{x^4}{16}\right)dx \Rightarrow$

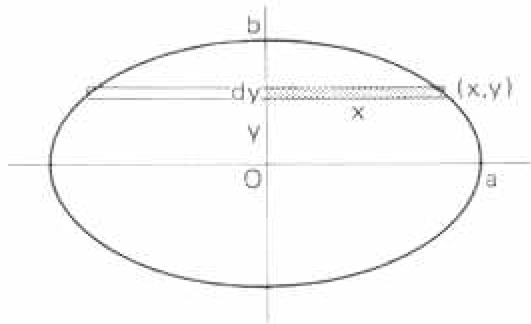
$$V = \int_0^4 \pi\left(x^2 - \frac{1}{16}x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \pi\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{16}\frac{4^5}{5}\right) = \boxed{\frac{128}{5}\pi}$$

15.39 **De la familia de elipses de ecuaciones:** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

cuyos semiejes a y b cumplen la condición de que $a^2 + b^2 = 1$, determinar aquella que, al girar alrededor del eje OY, engendra un sólido de revolución de volumen máximo.

(Univ. de Navarra)

Hallemos el volumen del sólido de revolución. El volumen engendrado por el rectángulo de la fira al girar alrededor del eje OY es:



$$dV = \pi x^2 dy = \pi a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy \Rightarrow$$

$$V = 2\int_0^b \pi a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a^2\left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b =$$

$$= 2\pi a^2\left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = 2\pi a^2 \cdot \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

y como $a^2 + b^2 = 1$: $\quad V = \dfrac{4}{3}\pi(1 - b^2)b = \dfrac{4}{3}\pi(b - b^3)$

$$\frac{dV}{db} = \frac{4}{3}\pi(1 - 3b^2)\ ; \quad \frac{dV}{db} = 0 \Rightarrow 1 - 3b^2 = 0\ ; \quad b^2 = \frac{1}{3}\ ; \quad a^2 = 1 - b^2 = \frac{2}{3}$$

y al ser $\dfrac{d^2V}{db^2} = \dfrac{4}{3}\pi(-6b) < 0$, tenemos un máximo.

Elipse pedida: $\quad \boxed{\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1}$

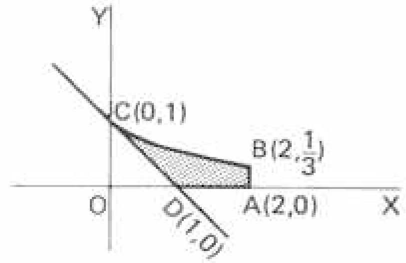
15.40 **La región situada en el primer cuadrante y limitada por las líneas**

$$y = \frac{1}{x+1}$$

la recta tangente a la curva anterior en el punto de abscisa $x = 0$, la recta $x = 2$ y el eje OX, gira alrededor de éste último. Hallar el volumen del cuerpo de revolución que se genera. Hacer la representación gráfica.

(Univ. del País Vasco)

$y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$; $f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow$ la ecuación de la tangente a la curva en el punto $(0, 1)$ es:



$$y - 1 = -1(x - 0), \quad y = -x + 1$$

esta recta corta a los ejes en los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

$y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, $\Rightarrow$ la curva es decreciente en todos sus puntos.

Para $x = 2$, $y = \dfrac{1}{3}$.

El volumen pedido, generado por la parte tramada al girar $360°$ alrededor del eje OX, es igual al volumen generado al girar el cuadrilátero mixtilíneo OABC, menos el volumen del cono generando al girar el triángulo ODC:

$$V = \int_0^2 \pi y^2\, dx - \frac{1}{3}\pi\, \overline{OC}^2 \cdot \overline{OD} = \int_0^2 \pi \frac{1}{(x+1)^2}\, dx - \frac{1}{3}\pi\, 1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^2 (x+1)^{-2} dx - \frac{1}{3}\pi =$$

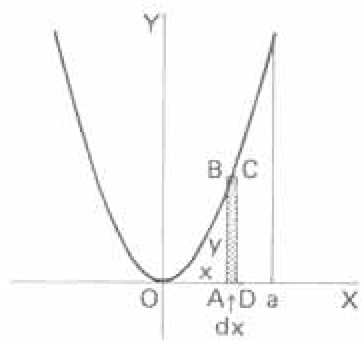
$$= \pi \left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^2 - \frac{1}{3}\pi = \pi\left(\frac{3^{-1}}{-1} - \frac{(1)^1}{-1}\right) - \frac{1}{3}\pi = \pi\left(\frac{-1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

15.41 **Si $a \in]0, 1[$, la ecuación $f_a(x) = \dfrac{1-a}{a^2} x^2$ representa a una parábola que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(a, 1-a)$. Se pide:**

1) **Calcular el área $S(a)$ de la región limitada por la gráfica de la parábola, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$. ¿Para qué valor de a el área $S(a)$ es máxima?**
2) **Calcula el volumen $V(a)$ generado al girar $360°$ alrededor del eje OX, la región limitada por la gráfica de la parábola, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$. ¿Para qué valor de a el volumen $V(a)$ es máximo?**

(Univ. de Valencia, 1991)

1) $S(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1-a}{a^2} x^2\, dx = \frac{1-a}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}(1-a)a = \boxed{\frac{1}{3}(a - a^2)}$



$S'(a) = \dfrac{1}{3}(1 - 2a)$, $S'(a) = 0 \Rightarrow 1 - 2a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$

$S''(a) = \dfrac{-2}{3} < 0$, para $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$ el área $S(a)$ es máxima.

2) El volumen engendrado por el rectángulo ABCD al girar $360°$ alrededor del eje OX es:

$$dV(a) = \pi y^2\, dx \Rightarrow V(a) = \int_0^a \pi \frac{(1-a)^2}{a^4} x^4\, dx = \pi \frac{(1-a)^2}{a^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \boxed{\frac{\pi(1-a)^2 a}{5}}$$

$$V'(a) = \frac{\pi}{5}\Big(2\,(1-a)\,(-1)\,a + (1-a)^2 \cdot 1\Big) = \frac{\pi}{5}\,(1-a)\,(1-3a)$$

$$V'(a) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \quad , \text{ no sirve porque } \; 1 \not\in\,]\,0\,;\,1\,[\\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$V''(a) = \frac{\pi}{5}\Big(-1(1-3a) + (1-a)(-3)\Big) = \frac{\pi}{5}\,(-4+6a) \;, \quad V''\Big(\frac{1}{3}\Big) = \frac{\pi}{5}\Big(-4+\frac{6}{2}\Big) < 0 \;\Rightarrow$$

para $\boxed{a = \dfrac{1}{3}}$ el volumen $V(a)$ es máximo.

CAPITULO 16

PROBABILIDADES

EXPERIMENTOS ALEATORIOS son los que repetidos en condiciones idénticas dan, frecuentemente, resultados diferentes, y por tanto, no es posible predecir el resultado de una experiencia particular.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son todos los resultados posibles del experimento, al conjunto

$$\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

se le llama *conjunto universal* o *espacio muestral*, y a los elementos r_i que constituyen Ω se les llama *sucesos elementales* o *resultados*. En cada prueba se obtendrá un resultado.

El espacio muestral del experimento de lanzar un dado al aire y leer el número de la cara superior es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Antes de hacer una prueba en un experimento aleatorio no puede predeterminarse el resultado, pero sí sabemos con certeza que será alguno de los elementos del espacio muestral Ω.

Fenómenos *estocásticos* o *aleatorios* son los que con las mismas causas pueden dar lugar a resultados diferentes.

El lanzamiento de un dado y lectura del número de su cara superior.

Fenómenos *determinísticos* son los que con las mismas causas dan siempre los mismos resultados.

El tiempo empleado por un móvil en recorrer la distancia d a la velocidad constante v será siempre el mismo.

Suceso de un experimento aleatorio es todo subconjunto del espacio muestral. Los sucesos se simbolizan por $A, B, C, \ldots$

El suceso A está bien definido si se ha establecido un criterio lógico que nos permite afirmar que el resultado r_i verifica o no al suceso A.

El suceso "obtener un número par al lanzar un dado" es $A = \{2, 4, 6\}$. Diremos que se ha realizado el suceso A si como resultado de un único lanzamiento se ha presentado el 2, o el 4 o el 6.

Los sucesos elementales son los subconjuntos unitarios de Ω.

Suceso seguro es el que se verifica por todos los resultados del experimento. Se simboliza por Ω.

El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número igual o menor que 6 es: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Suceso imposible es el que no se verifica por ninguno de los resultados posibles del experimento. Se simboliza por ϕ.

El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número superior a 6 es el suceso imposible.

Suceso contrario u **opuesto** de A es aquél que se verifica por todos los resultados que no verifican A. Se simboliza por $\overline{A}$ o por A^c.

$$\text{Realización de } \overline{A} \Leftrightarrow \text{ no realización de } A.$$

El suceso contrario del suceso "obtener un número par al lanzar un dado" es: $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, ya que $A = \{2, 4, 6\}$ y $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$.

Sucesos idénticos o equivalentes: Si el suceso B es verificado por los mismos resultados que verifican al suceso A y sólo por éstos, se dice que los sucesos A y B son identicos. Se escribe $A = B$. Los sucesos elementales de A y B son los mismos.

El suceso $B = \{1, 2, 3, 5\}$ es idéntico al suceso A: "obtener un número primo al lanzar un dado".

El suceso A implica al suceso B si todos los resultados que verifican A verifican tambien B. Se simboliza por: $A \Rightarrow B$ o $A \subset B$.

Sea el suceso A "obtener un número impar al lanzar un dado" y B el suceso "obtener un número primo":

$$A = \{1, 3, 5\} \ ; \quad B = \{1, 2, 3, 5\} \ ; \quad A \Rightarrow B$$

Siempre que se realiza A se realiza B.

Sucesos incompatibles o **excluyentes.** Los sucesos A y B son incompatibles si su realización simultánea es imposible.

El suceso A "obtener un número primo al lanzar un dado", y el suceso B "obtener un 6", son incompatibles.

En particular, dos sucesos contrarios son incompatibles.

Más general, los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles si son incompatibles dos a dos.

Sucesos compatibles. Los sucesos A y B son compatibles si su realización simultánea es posible.

El suceso A "obtener un número primo al lanzar un dado" y el suceso B "obtener un número par", son compatibles, ya que si sale el 2 se verifican ambos sucesos.

OPERACIONES CON SUCESOS

Unión de los suceso A y B es el suceso que se realiza cuando uno al menos de los sucesos A y B se realiza. Se simboliza por $A \cup B$.

$$\text{realización de } A \cup B \iff \text{realización de } A, \text{ o de } B, \text{ o de } A \text{ y } B$$

Si A es el suceso "obtener un número par" al lanzar un dado, y B el suceso "obtener un múltiplo de tres".

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\} \quad \Rightarrow \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

Más general, se llama unión de los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, al suceso que se realiza cuando al menos uno de los sucesos A_i se realiza. Se simboliza por $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Intersección de los sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando A y B se realizan simultaneamente. Se simboliza por $A \cap B$.

$$\text{realización de } A \cap B \iff \text{realización simultánea de } A \text{ y } B$$

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{6\}$$

Más general, se llama intersección de los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$, al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente todos los A_i.

Los sucesos A y B son compatibles si y solo si $A \cap B \neq \phi$

Si A es el suceso "obtener un número par" al lanzar un dado, B el suceso "obtener un múltiplo de 3" y C el suceso "obtener un múltiplo de 5":

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad C = \{5\}$$

$$A \cap B = \{6\} \ ; \quad A \cap C = \phi \quad ; \quad B \cap C = \phi$$

los sucesos A y B son compatibles, A y C son incompatibles y B y C son incompatibles.

Se llama *diferencia* de los sucesos A y B al suceso que se realiza por los resultados que realizan A y no realizan B. Se simboliza por $A - B$. Se verifica que $A - B = A \cap \overline{B}$.

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituyen una *partición* de Ω si ninguno es el ϕ, son incompatibles dos a dos, y, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

PROPIEDADES DE LA UNION Y DE LA INTERSECCION.

Sea un experimento aleatorio de espacio muestral Ω (siendo Ω, conjunto de los resultados, un conjunto finito no vacío), y $\mathscr{P}(\Omega)$ el conjunto de parte de Ω, o conjunto de los sucesos que se pueden considerar en el experimento, incluido el suceso imposible ϕ.

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\forall A, B, C, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega): \left| \begin{array}{l} A \cup B \cup C \cup \ldots \in \mathscr{P}(\Omega) \\ \\ A \cap B \cap C \cap \ldots \in \mathscr{P}(\Omega) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \; \exists \bar{A} \in \mathscr{P}(\Omega) \quad (2)$$

	$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$	(3)
	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	(4)
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(5)
Asociativa:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(6)
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(7)
Idempotente:	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(8)
De complemento:	$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \; \exists \bar{A} \in \mathscr{P}(\Omega) \; / \; A \cup \bar{A} = \Omega$	y $A \cap \bar{A} = \phi$	(9)
Simplificativa:	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	(10)
Leyes de De Morgan:	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	(11)

ALGEBRA DE BOOLE.

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio, y $\mathscr{A}$ un conjunto cuyos elementos son sucesos de dicho experimento.

$\mathscr{A}$ es un **álgebra de Boole** de parte de Ω si y solo si se cumplen las tres propiedades siguientes:

1º $\mathscr{A} \neq \phi$

2º $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \bar{A} \in \mathscr{A}$

3º $\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2, \quad A \cup B \in \mathscr{A}$

El conjunto $\mathscr{P}(\Omega)$ es un álgebra de Boole sobre Ω

El conjunto $\{\phi, \Omega\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω

Si Ω tiene al menos dos elementos y A es un subconjunto propio de Ω, el conjunto $\{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω, llamada álgebra de Bernouilli o álgebra engendrada por A.

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de Ω, el conjunto constituido por la unión finita de elementos de esta partición y el suceso imposible, es un álgebra de Boole, llamada álgebra engendrada por la partición $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) = \{\phi, \Omega, A, B, C, \ldots\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω, cualquiera que sea $A \neq \phi$, el conjunto $\mathscr{B} = \{\phi \cap A, \Omega \cap A, A \cap A, B \cap A, C \cap A, \ldots\}$, es un álgebra de Boole cuyo conjunto universal es A.

Al par $(\Omega, \mathscr{A})$, constituido por el conjunto de los resultados Ω, y el álgebra de Boole de los sucesos estocásticos $\mathscr{A}$ se le llama *espacio probabilizable*.

A los elementos de $\mathscr{A}$ se les llama *sucesos estocásticos*, y a los elementos r_i que constituyen Ω se les llama *sucesos elementales* o *resultados*.

Toda algebra de Boole sobre Ω contiene el conjunto universal Ω y el conjunto vacio ϕ. Estos son sucesos estocásticos, llamados sucesos *seguro* e *imposible*.

Teorema de Stone: A toda álgebra de Boole de sucesos $\mathscr{A}$ sobre Ω se le puede hacer corresponder un álgebra de Boole de partes del conjunto Ω que le es isomorfa.

Del isomorfismo entre las álgebras de Boole de sucesos y conjuntista se obtienen importantes ventajas:

– nos permite utilizar para los sucesos el lenguaje, que conocemos, de la teoría de conjuntos.

– deducir, de las propiedades de los conjuntos, las propiedades de los sucesos.

– representar los sucesos por el diagrama de Venn, como se hace en los conjuntos.

– en la Teoría de las Probabilidades podemos deducir las propiedades de las probabilidades de las propiedades de los conjuntos.

– podemos establecer las siguientes equivalencias:

SUCESOS	CONJUNTOS
suceso elemental	conjunto unitario
Ω = suceso seguro	Ω = conjunto universal
ϕ = suceso imposible	ϕ = conjunto vacío
suceso	subconjunto de Ω
suceso contrario	conjunto complementario
sucesos incompatibles	conjuntos disjuntos
unión de sucesos	unión de conjuntos
intersección de sucesos	intersección de conjuntos
$A \subset B$, el suceso A implica el suceso B	$A \subset B$, A es subconjunto de B
$\mathscr{P}(\Omega)$ conjunto de todos los sucesos del experimento de universo Ω, incluidos Ω y ϕ.	$\mathscr{P}(\Omega)$ = conjunto de partes de Ω

FRECUENCIAS.

Si se realizan n pruebas en un experimento aleatorio y el suceso A se presenta n_A veces, se dice que la *frecuencia absoluta* del suceso A en las n pruebas es n_A, y la *frecuencia relativa* es $\frac{n_A}{n}$. La frecuencia relativa la simbolizaremos por fr (A).

Se lanza un dado 10 veces, obteniendo los siguientes resultados: 5, 2, 1, 1, 3, 2, 6, 4, 3, 1. Si el suceso A es "obtener un número impar": $A = \{1, 3, 5\}$, la frecuencia absoluta de A es 6, y $fr(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

– La frecuencia relativa es un número racional tal que $0 \leq fr(A) \leq 1$.

– La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

– La frecuencia relativa del suceso imposible es 0.

– Si A y $\bar{A}$ son dos sucesos contrarios: $fr(A) + fr(\bar{A}) = 1$.

– Si A y B son dos sucesos incompatibles: $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$.

DEFINICION DE PROBABILIDAD.

Definición axiomática de probabilidad. Una probabilidad P sobre un álgebra de Boole $\mathscr{A}$ de elemento universal Ω, es una aplicación de $\mathscr{A}$ en el intervalo real $[0,1]$ que satisface las tres propiedades siguientes, llamadas axiomas de la probabilidad:

- Para todo suceso $A \in \mathscr{A}$: $P(A) \geq 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos de $\mathscr{A}$ incompatibles dos a dos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

$P(A)$ se leerá "probabilidad del suceso A" o simplemente "probabilidad de A".

La terna $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ se llama *espacio de probabilidad.*

Toda aplicación del álgebra de Boole $\mathscr{A}$ en $[0,1]$ que cumpla los tres axiomas anteriores es una probabilidad. Cuando $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, se empieza asignando probabilidades a los sucesos elementales, teniendo que ser 1 la suma de las probabilidades de los sucesos elementales. Como cualquier otro suceso se puede descomponer en la unión de sucesos elementales (que son incompatibles dos a dos), por el tercer axioma se obtiene su probabilidad.

La asignación de probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio suele hacerse considerando las frecuencias relativas de los sucesos elementales en un número elevado de pruebas o bien, propiedades de simetría, geométricas, físicas, . . . de los factores que engendran los sucesos.

Sea un dado trucado cuyas caras están numeradas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Se lanza el dado 100 veces con los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5	6
n_i	12	9	15	22	16	26

Asignando a cada suceso elemental una probabilidad igual a su frecuencia relativa se tendrá:

$$P(1) = \frac{12}{100} \;;\; P(2) = \frac{9}{100} \;;\; P(3) = \frac{15}{100} \;;\; P(4) = \frac{22}{100} \;;\; P(5) = \frac{16}{100} \;;\; P(6) = \frac{26}{100}$$

y la probabilidad del suceso A "sale un número impar":

$$P(A) = P(1, 3, 5) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{12}{100} + \frac{15}{100} + \frac{16}{100} = \frac{43}{100}$$

Si el dado es homogéneo, todas las caras tienen, en cada prueba, la misma posibilidad de salir, se dice que los sucesos elementales son equiprobables, y considerando que la suma de las probabilidades de los sucesos elementales tiene que ser igual a 1, se hace la siguiente asignación de probabilidades:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

La probabilidad del suceso $A = (1, 3, 5)$ será:

$$P(A) = P(1, 3, 5) = P(1) + P3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De la definición de probabilidad se deducen las siguientes propiedades:

- las probabilidades de dos sucesos contrarios suman uno:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

- la probabilidad del suceso imposible es cero: $\boxed{P(\phi) = 0}$

- para cualquier suceso A: $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

- si A implica B $(A \subset B)$, se tiene: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$

— para dos sucesos cualesquiera, A y B: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

— para tres sucesos cualesquiera A, B y C:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

— si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituyen una partición de Ω:

$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$$

Sucesos equiprobables. Sea $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ un espacio de probabilidad finito, y A y B dos elementos de $\mathscr{A}$:

A y B son dos sucesos equiprobables si y solo si $P(A) = P(B)$.

Si $\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ y todos los sucesos elementales son equiprobables:

$$\left.\begin{array}{l} P(\Omega) = P(r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ \\ P(\Omega) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow P(r_1) + P(r_2) + \cdots + P(r_n) = 1 \Rightarrow n \cdot P(r_i) = 1 \Rightarrow P(r_i) = \frac{1}{n}$$

Si $A = \{r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n'}\}$: $P(A) = P(r'_1) + P(r_2) + \cdots + P(r'_{n'}) = n' \cdot \frac{1}{n} = \frac{n'}{n} = \frac{\text{cardinal de } A}{\text{cardinal de } \Omega}$

Esta fórmula, llamada *regla de Laplace*, se suele expresar así: La probabilidad de un suceso A de un experimento aleatorio en el que todos sus sucesos elementales son equiprobables, es igual al número de casos favorables al suceso A dividido por el número de casos posibles del experimento.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}}$$

Se puede también expresar así: La probabilidad de un suceso A de un experimento aleatorio en el que todos los sucesos elementales son equiprobables, es igual al número de resultados distintos en los que se realiza A, dividido por el número de resultados distintos del experimento.

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras (de igual diámetro y de características idénticas). Se sacan al azar simultáneamente dos bolas. Se pide: a) Probabilidad de que las bolas sean de distinto color. b) Probabilidad de que sean blancas. c) Probabilidad de que sean negras. d) Probabilidad de que sean del mismo color.

(En este tipo de problemas de bolas hay que considerar que aunque las bolas sean del mismo color son distintas, podemos considerar que están numeradas para distinguir unas de otras).

Sea A el suceso "las dos bolas son de distinto color", B el suceso "las dos bolas son blancas" y N el suceso "las dos bolas son negras".

Como el orden no interviene en los resultados, el número de maneras distintas de sacar dos bolas de las ocho que tiene la urna es igual al número de combinaciones de ocho elementos tomados de dos en dos.

$$\text{número de casos posibles} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

a) Cada una de las 5 bolas blancas se puede combinar con cada una de las 3 negras para formar $5 \cdot 3 = 15$ parejas de bolas de distinto color, o sea que el número de casos favorables al suceso A es 15:

$$P(A) = \frac{15}{28}$$

b) El número de casos favorables al suceso B es igual al número de maneras distintas de sacar 2 bolas blancas entre las 5 blancas. Como el orden no interviene:

$$\text{casos favorables al suceso } B = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{10}{28}$$

c)
$$P(N) = \frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{28} = \frac{3}{28}$$

d) Nos piden $P(B \cup N)$. Por ser los sucesos B y N incompatibles:

$$P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{11}{28}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA.

Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatoria, tales que $P(B) > 0$.

Se llama **probabilidad condicionada de A respecto de B**, la probabilidad de que se realice A sabiendo que se ha realizado B. Se simboliza por $P(A/B)$.

Suponer que se ha realizado B equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de B, y los sucesos favorables al suceso A, habiéndose realizado B, a los sucesos elementales de $A \cap B$.

Al valor de $P(A/B)$, que se refiere a un suceso ya realizado (B) se le da el nombre de *probabilidad a posteriori* de A, en contraposición al valor de $P(A)$, al que se da el nombre de *probabilidad a priori* de A, es decir, antes de hacer ninguna prueba y saber si B se ha realizado o no.

Supongamos que al realizar n pruebas se han obtenido los siguientes resultados:

n_A veces se ha realizado el suceso A

n_B veces se ha realizado el suceso B

n_{AB} veces se ha realizado el suceso $A \cap B$

de donde: $fr\,(A) = \dfrac{n_A}{n}$, $fr\,(B) = \dfrac{n_B}{n}$, $fr(A/B) = \dfrac{n_{AB}}{n_B} = \dfrac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \dfrac{fr\,(A \cap B)}{fr\,(B)}$

y como las frecuencias relativas fluctúan en torno de las probabilidades, se hace la siguiente definición:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad , \quad P(B) > 0$$

De la misma forma, si $P(A) > 0$: $\boxed{P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

De las dos últimas igualdades resulta, si A y B son sucesos de probabilidad no nula:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \\ \hline P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \end{array}}$$

Estas igualdades se denominan "**teorema de la probabilidad compuesta**" o "**teorema de la intersección**".

En un Instituto, el 60% de los alumnos de COU estudian Matemáticas I, y el 80% de los que estudian Matemáticas I tudian también Física. Se elige al azar un estudiante de COU de dicho Instituto, ¿cuál es la probabilidad de que estue Matemáticas I y Física?

Sea M el suceso "estudia Matemáticas I", F el suceso "estudia Física".

Por el teorema de la probabilidad compuesta: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F/M) = \dfrac{60}{100} \cdot \dfrac{80}{100} = 0'6 \cdot 0'8 = 0'48$

El 48% de los alumnos de COU de dicho Instituto estudian ambas asignaturas.

— si A y B son incompatibles: $P(A/B) = \dfrac{P(\phi)}{P(B)} = 0$

— si $A \subset B$: $A \cap B = A \Rightarrow P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

— si $A \subset B$: $\quad A \cap B = B \quad \Rightarrow \quad P(A/B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Teorema de la intersección para tres sucesos A, B y C, siendo $P(A \cap B) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)}$$

Para cuatro sucesos A, B, C y D, siendo $P(A \cap B \cap C) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) \cdot P(D/A \cap B \cap C)}$$

Tres amigos, Alvaro, Fernando y Luis, se encuentran una moneda de oro. Para decidir quién se queda con ella ponen en una urna dos bolas rojas y una blanca. Ganará el que saque la bola blanca. Si las extracciones las hacen por el orden: Alvaro, Fernando y Luis, hallar cuál de los tres tiene mayor probabilidad de quedarse con la moneda.

Sea A el suceso "Alvaro saca la bola blanca", F "Fernando saca la bola blanca" y L "Luis saca la bola blanca.

— ganará Alvaro si se realiza el suceso A: $P(A) = \frac{1}{3}$.

— ganará Fernando si se realiza el suceso $\bar{A} \cap F$: $P(\bar{A} \cap F) = P(\bar{A}) \cdot P(F/\bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

— ganará Luis si se realiza el suceso $\bar{A} \cap \bar{F} \cap L$: $P(\bar{A} \cap \bar{F} \cap L) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{F}/\bar{A}) \cdot P(L/\bar{A} \cap \bar{F}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Los tres tienen la misma probabilidad de quedarse con la moneda.

SUCESOS INDEPENDIENTES.

Los sucesos A y B son independientes si y solo si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

De esta definición y del teorema de la probabilidad compuesta, resulta que los sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$.

En el experimento de lanzar un dado homogéneo y leer el número de la cara superior se consideran los sucesos A "se obtiene un número primo", B "se obtiene un múltiplo de 2" y C "se obiene un múltiplo de 3". Estudiar la independencia de estos sucesos.

$A = \{1, 2, 3, 5\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{3, 6\}$; $\quad A \cap B = \{2\}$; $A \cap C = \{3\}$; $B \cap C = \{6\}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$; $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq P(A \cap B) \Rightarrow$ los sucesos A y B no son independientes

$P(A) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq P(A \cap C) \Rightarrow$ los sucesos A y C no son independientes

$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(B \cap C) \Rightarrow$ los sucesos B y C son independientes

Si los sucesos A y B son independientes, también son independientes los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, los sucesos $\bar{A}$ y B, y los sucesos A y $\bar{B}$.

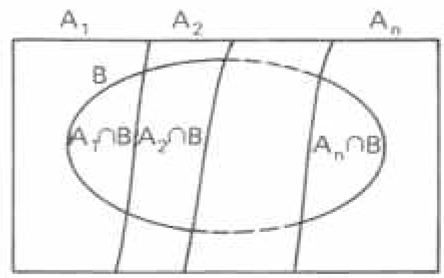
Los sucesos A, B y C son independientes si se verifican las cuatro relaciones siguientes:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

TEOREMA DE LA PARTICION o de la probabilidad total.

Sean los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que constituyen una partición de Ω, o sea son incompatibles dos a dos y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, y tales que $P(A_i) > 0$:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \quad \Rightarrow$$

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)]$$

y por ser los sucesos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ incompatibles dos a dos:

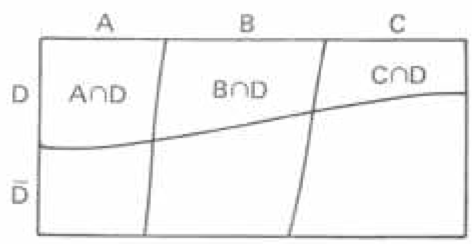
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Una fábrica de tornillos tiene tres máquinas A, B y C. La máquina A produce el 50 % de los tornillos, la B el 30 % y la C el 20 %. Se sabe que el 5 % de los tornillos producidos por la máquina A son defectuosos, el 8 % de los producidos por la máquina B son defectuosos y el 10 % de los producidos por la máquina C son defectuosos.

De la producción de un día se toma un tornillo al azar, hallar la probabilidad de que sea defectuoso.

Sean A, B y C, respectivamente, "el tornillo elegido ha sido fabricado por la máquina A, B y C", y D el suceso "el tornillo elegido es defectuoso".



$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) \quad \Rightarrow$$

$$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]$$

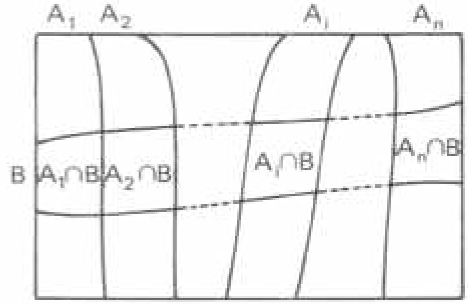
por ser los sucesos $A \cap D$, $B \cap D$ y $C \cap D$ incompatibles dos a dos:

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{8}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{250 + 240 + 200}{10000} = \frac{690}{10000} = 0{,}069$$

TEOREMA DE BAYES.

Sean los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$, que constituyen una partición de Ω, y B un suceso que se sabe que se ha realizado al hacer una prueba.



Se conocen:

— las probabilidades condicionadas

$$P(B/A_1),\ P(B/A_2), \dots, P(B/A_i), \dots, P(B/A_n)$$

— las probabilidades "a priori"

$$P(A_1),\ P(A_2), \dots, P(A_n)$$

y se desea calcular la probabilidad "a posteriori" $P(A_i/B)$.

De la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

como $$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_i \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

y los sucesos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \ldots, A_i \cap B, \ldots, A_n \cap B$ son incompatibles dos a dos:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_i \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}$$

y por el teorema de la probabilidad compuesta:

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_i) \cdot P(B/A_i) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}}$$

Esta es la fórmula del *teorema de Bayes.*

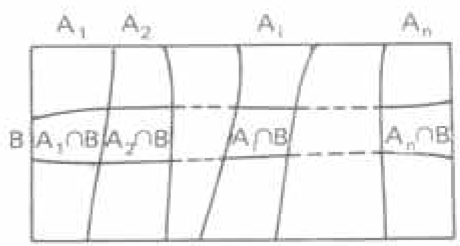
La aplicación prática del teorema de Bayes se suele facilitar operando del siguiente modo:

Usando un diagrama de Venn, podemos suponer que se distribuye una unidad de masa ficticia sobre el espacio muestral Ω, de tal modo que a cada suceso S corresponde una cantidad de masa igual a $P(S)$.

Suponer que se ha realizado B equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de B y los casos favorables al suceso A_i a los sucesos elementales de $A_i \cap B$, de donde:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

que es la fórmula (1). A partir de aquí se continua hasta obtener la fórmula de Bayes y se aplican los datos del problema.



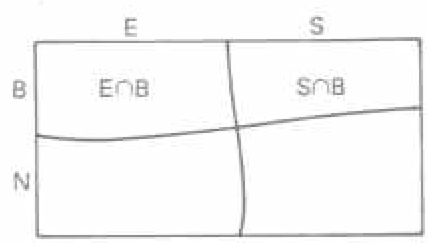
En cierto país, donde la enfermedad A es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totamente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de las personas sanas. Se elige una persona al azar, se le hace la prueba y da positiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté sana?

(Univ. de Murcia)

Sea E el suceso "la persona elegida está enferma", S el suceso "la persona elegida está sana", B el suceso "la prueba da positiva" y N el suceso "la prueba da negativa".

Según el enunciado:

$P(E) = 0{,}12$; $P(S) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$; $P(B/E) =$
$= 0{,}90$; $P(B/S) = 0{,}05$



Nos piden: $P(S/B)$.

El saber que la prueba ha dado positiva equivale a restringir el universo al suceso B, y los casos favorables al suceso S a los sucesos elementales del suceso $S \cap B$:

$$P(S/B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \quad (1) ; \qquad B = (E \cap B) \cup (S \cap B) \Rightarrow P(B) = P[E \cap B) \cup (S \cap B)]$$

y como los sucesos $E \cap B$ y $S \cap B$ son incompatibles: $P(B) = P(E \cap B) + P(S \cap B)$ llevando este valor a (1):

$$P(S/B) = \frac{P(S \cap B)}{P(E \cap B) + P(S \cap B)} = \frac{P(S) \cdot P(B/S)}{P(E) \cdot P(B/E) + P(S) \cdot P(B/S)} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}05}{0{,}12 \cdot 0{,}90 + 0{,}88 \cdot 0{,}05} = \frac{88 \cdot 5}{12 \cdot 90 + 88 \cdot 5} = \frac{440}{1520} = 0{,}29$$

FORMULA DE BERNOUILLI en una probabilidad o distribución binomial.

Sea un experimento aleatorio en el que se verifican estas hipótesis :

- el resultado de cada prueba pertenece a uno de estos dos sucesos: A o $\bar{A}$.
- la probabilidad del suceso A es la misma en cada prueba
- los resultados de cada prueba son independiente entre sí

Si p es la probabilidad del suceso A en una sola prueba y $q = 1 - p$ es la probabilidad del suceso $\bar{A}$ en una sola prueba, la probabilidad de que el suceso A se presente exactamente x veces en n pruebas (y no se presente en las $n-x$ pruebas restantes) es:

$$\boxed{P = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$$

Un bar dispone de cervezas y refrescos. La probabilidad de que un cliente pida una cerveza es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que pida un refresco es $\frac{1}{3}$. Si son atendidos 20 clientes. ¿Cual es la probabilidad de que 14 pidan una cerveza y 6 un refresco? .

(Univ. de Valladolid, 1991)

Se tiene una probabilidad binomial, en la que $p = \frac{2}{3}$, $q = 1 - p = \frac{1}{3}$, $n = 20$ y $x = 14$:

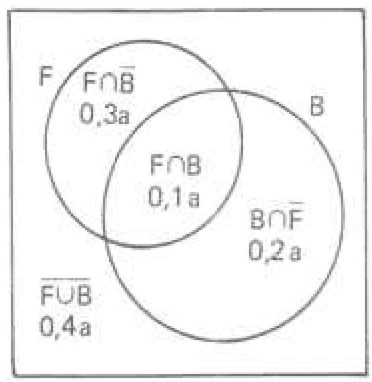
$$P = \binom{20}{14}\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6} = \binom{20}{6}\frac{2^{14}}{3^{20}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{2^{14}}{3^{20}} = 0{,}182$$

PROBLEMAS

16.1 **En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al futbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al futbol, ¿cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:**

a) Juegue sólo al futbol.
b) Juegue sólo al baloncesto.
c) Practique uno solo de los deportes (futbol o baloncesto).
d) No juegue ni al futbol ni al baloncesto.

(Univ. de La Laguna – Tenerife)



Supongamos que en total hay a alumnos:

$\text{card}\,(F\cap\overline{B}) + \text{card}\,(F\cap B) + \text{card}\,(B\cap\overline{F}) + \text{card}\,(\overline{F\cup B}) = a$ (1)

$\text{card}\,(F\cap\overline{B}) + \text{card}\,(F\cap B) + \text{card}\,(B\cap\overline{F}) = 0{,}60\ a$ (2)

$\text{card}\,(F\cap B) = 0{,}10\ a$ (3)

$\text{card}\,(\overline{F\cup B}) + \text{card}\,(B\cap\overline{F}) = 0{,}60\ a$ (4)

(1) – (2): $\text{card}\,(\overline{F\cup B}) = 0{,}4\ a$

llevando este valor a (4): $\text{card}\,(B\cap\overline{F}) = 0{,}6\,a - 0{,}4\,a = 0{,}2\ a$

llevando este resultado y (3) a (2): $\text{cad}\,(F\cap\overline{B}) = 0{,}6\,a - 0{,}1\,a - 0{,}2\,a = 0{,}3\,a$

a) $P(F\cap\overline{B}) = \dfrac{0{,}3a}{a} = \boxed{0{,}3}$

b) $P(B\cap\overline{F}) = \dfrac{0{,}2\,a}{a} = \boxed{0{,}2}$

c) $P[(F\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{F})] =$

(por ser los sucesos $F\cap B$ y $B\cap F$ incompatibles):

$$= P(F\cap\overline{B}) + P(B\cap\overline{F}) = \frac{0{,}3\,a}{a} + \frac{0{,}2\,a}{a} = \boxed{0{,}5}$$

d) $P(\overline{F\cup B}) = \dfrac{0{,}4\,a}{a} = \boxed{0{,}4}$

16.2 **Las caras de un dado homogéneo están numeradas del 1 al 6. Hallar la probabilidad de que al lanzar el dado la suma de los números de las caras visibles sea múltiplo de 5.**

(Univ. de Madrid)

Hallaremos los resultados posibles considerando el número de la cara oculta, habrá por tanto 6 resultados distintos, igual al de casos posibles del experimento.

Al ser el dado homogéneo, todos los resultados son equiprobables, se puede emplear la fórmula de Laplace para calcular la probabilidad pedida.

La suma de los seis números de las caras es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. La suma de las caras visibles será múltiplo de 5 si el número de la cara oculta es el 1 ó el 6. Los casos favorables al suceso "la suma de las caras visibles es múltiplo de 5", es 2, de donde:

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

16.3 **Se tiran dos dados. Sea E el suceso de que la suma de los puntos obtenidos sea impar. Sea F el suceso de que por lo menos uno de los dados muestre un 1. Calcular $P(E \cap F)$ y $P(E \cup F)$.**

(Univ. de Madrid)

El suceso E será: $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3,2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (2, 5), (4, 5), (6, 5)\}$

el suceso F será: $F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

$E \cap F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\}$

$E \cup F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (2, 1) (4, 1), (6, 1), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (2, 5), (4, 5), (6, 5), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)\}$

como los casos posibles son $6 \cdot 6 = 36$ ya que cada una de las 6 caras del primer dado se combina con cada una de las 6 caras del segundo:

$$P(E \cap F) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}; \qquad P(E \cup F) = \boxed{\frac{23}{36}}$$

16.4 **Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad**

a) De que primero salga un cuatro y luego no.

b) De que se obtenga por lo menos un dos.

(Univ. de Valladolid, 1991)

El espacio muestral tiene $6 \times 6 = 36$ sucesos elementales, igualmente posibles:

a) El suceso A "sale primero un cuatro y luego no" es

$$A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6)\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \boxed{\frac{5}{36}}$$

b) El suceso B "sale por lo menos un dos" es:

$$B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \boxed{\frac{11}{36}}$$

16.5 **En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Hallar la probabilidad de que al extraer simultaneamente dos bolas resulten de la misma paridad.**

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea A el suceso "las dos bolas son pares" y B el suceso "las dos bolas son impares". El suceso "las dos bolas son de la misma paridad" será $A \cup B$. Como A y B son sucesos incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El número de casos favorables al suceso A es el número de maneras distintas de sacar dos bolas entre las 4 pares, como el orden no interviene, serán $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, y el número de casos favorables al suceso B será $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. El número de casos posibles será $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$, de donde:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

16.6 **Una urna contiene tres bolas rojas y dos verdes, y otra contiene dos bolas rojas y tres verdes. Se toma, al azar, una bola de cada urna. Escriba el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color? ¿Y la de que sean de distinto color?**

(Univ. de Granada)

Sean I y II las urnas. La composición de cada urna será la siguiente:

Urna I: $(R_{11}, R_{12}, R_{12}, V_{11}, V_{12})$

Urna II: $(R_{21}, R_{22}, V_{21}, V_{22}, V_{23})$

Cada una de las cinco bolas de la urna I se puede combinar con cada una de las cinco bolas de la urna II para formar $5 \cdot 5 = 25$ parejas de bolas que constituirán el espacio muestral:

$$\Omega = \{(R_{11}, R_{21}), (R_{11}, R_{22}), (R_{11}, V_{21}), (R_{11}, V_{22}), (R_{11}, V_{23}), \ldots, (V_{12}, R_{21}), (V_{12}, R_{22}), (V_{12}, V_{21}), (V_{12}, V_{22}), (V_{12}, V_{23})\}.$$

Sea A el suceso "las dos bolas son del mismo color", y B el suceso "las dos bolas son de distinto color".

Los casos posibles son 25, igual al número de elementos de Ω.

Obtención del número de casos favorables al suceso A: Cada una de las 3 bolas rojas de la urna I se puede combinar con cada una de las 2 bolas rojas de la urna II, para formar $3 \times 2 = 6$ parejas de bolas rojas en que hay una bola roja de cada urna. De la misma forma se razona que hay $2 \times 3 = 6$ formas distintas de sacar una bola verde de la urna I y una bola verde de la urna II. Los casos favorables al suceso A son $6 + 6 = 12$.

$$P(A) = \boxed{\frac{12}{25}}$$

Los sucesos A y B son contrarios, de donde:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{12}{25} = \boxed{\frac{13}{25}}$$

16.7 **Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. La probabilidad de extracción de cada una de las bolas es proporcional al número que en ellas aparece. Se extrae una sola bola y, sin devolverla a la urna, se saca una segunda bola. Se pide:**

a). Hallar la constante de proporcionalidad.
b). El conjunto de todos los resultados posibles que pueden darse.
c). La probabilidad de que al extraer una bola, la puntuación sea número par.

(Univ. de Castilla — La Mancha, 1991)

a) Si B_i es el suceso "se extrae la bola numerada con el número i al sacar una bola", el espacio muestral será:

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

siendo los sucesos B_i, sucesos elementales. Se puede escribir:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \Rightarrow 1 = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$$

y si k es la constante de proporcionalidad:

$$1 = 1 \cdot k + 2 \cdot k + 3 \cdot k + 4 \cdot k \Rightarrow 1 = 10 \cdot k \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{10}}$$

b) Sea (a, b) el suceso elemental "al extraer dos bolas sin reemplazamiento, la primera bola es la numerada con el número a y la segunda con el número b":

$$\boxed{\Omega' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4,3)\}}$$

c) En el experimento de extraer una sola bola, los sucesos B_2 y B_4 son incompatibles, de donde:

$$P(B_2 \cup B_4) = P(B_2) + P(B_4) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

16.8 **Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Este se realiza extrayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.**

(Univ. de Cantabria)

Sea N el suceso "los dos temas extraidos son de los 10 que no ha estudiado el alumno", y S el suceso "el alumno ha estudiado alguno de los dos temas extraidos". Los suceso N y S son contrarios

Casos posibles: Serán las distintas formas de sacar 2 temas entre los 25, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Casos favorables al suceso N: Serán las distintas formas de sacar 2 temas entre los 10 que no ha estudiado el alumno.

$$\text{número de casos favorables a N} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

de donde: $P(N) = \dfrac{45}{300} = \dfrac{3}{20} \Rightarrow P(S) = 1 - P(N) = 1 - \dfrac{3}{20} = \boxed{\dfrac{17}{20}}$

16.9 **Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de 3 al azar, hallar la probabilidad de:**

a) Seleccionar tres niños.
b) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
c) Seleccionar por lo menos un niño.
d) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

(Univ. de Murcia)

Los casos posibles son las distintas maneras de escoger 3 personas entre las 16 de la clase, considerando que dos maneras son distintas cuando difieran en alguna persona, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} = 560$$

a) El número de casos favorables a elegir 3 niños entre los 10 es: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$

$$P(\text{seleccionar } 3 \text{ niños}) = \frac{120}{560} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

b) Cada uno de los grupos distintos de 2 niños: $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, se combina con cada una de las 6 niñas para formar $45 \cdot 6 = 270$ grupos distintos de 2 niños y una niña:

$$P(\text{seleccionar } 2 \text{ niños y } 1 \text{ niña}) = \frac{270}{560} = \boxed{\frac{27}{56}}$$

c) El suceso "seleccionar por lo menos un niño" es el suceso contrario de "seleccionar 3 niñas".

$$\text{número de casos favorables a seleccionar 3 niñas: } \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

$$P(\text{seleccionar tres niñas}) = \frac{20}{560} = \frac{1}{28} \Rightarrow P(\text{seleccionar por lo menos un niño}) = 1 - \frac{1}{28} =$$

$$= \frac{28-1}{28} = \boxed{\frac{27}{28}}$$

d) $$P(\text{seleccionar } 2 \text{ niñas y } 1 \text{ niño}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 10}{560} = \frac{15 \cdot 10}{560} = \boxed{\frac{15}{56}}$$

16.10 **De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas. Calcular la probabilidad de que:**

a) Las dos sean copas.
b) Al menos una sea copas.
c) Una sea copas y la otra espadas.

(Univ. de las Islas Baleares)

a) Los casos posibles son los distintos modos de sacar 2 cartas entre las 48 de la baraja, considerando que dos modos son distintos si difieren en alguna carta, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{48}{2} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 1128$$

$$\text{número de casos favorables} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(\text{la dos cartas son copas}) = \frac{66}{1128} = \boxed{\frac{11}{188}}$$

b) Sea A el suceso "ninguna de las dos cartas es copas". El suceso $\bar{A}$, será "al menos una carta es copas".

Hay 36 cartas que no son copas:

$$\text{número de casos favorables al suceso } A = \binom{36}{2} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630$$

$$P(A) = \frac{630}{1128} = \frac{105}{188} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{105}{188} = \frac{188 - 105}{188} = \boxed{\frac{83}{188}}$$

c) **Casos favorables:** Cada una de las 12 copas se puede combinar con cada una de las 12 espadas para formar $12 \cdot 12 = 144$ parejas en que hay una carta de copas y otra de espadas:

$$P(\text{una carta sea copas y la otra espadas}) = \frac{144}{1128} = \boxed{\frac{6}{47}}$$

16.11 **Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se siente juntas?**

(Univ. de Sevilla, 1991)

Podemos suponer que el banco tiene 10 asiendos numerados del 1 al 10.

Casos posibles: $P_{10} = 10!$

Casos favorables: Sean a y b las personas que deben sentarse juntas: podrán sentarse en los lugares (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9) y (9, 10) y, en cada una de estas parejas, de la forma ab o ba, o sea de $9 \cdot 2 = 18$ maneras distintas, siendo ocupados los ocho lugares restantes por las otras ocho personas de 8! maneras. En total hay $18 \cdot 8!$ maneras distintas de sentarse las 10 personas, estando dos personas fijadas de antemano sentadas juntas.

$$P = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{18}{10 \cdot 9} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

16.12 **Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcular la probabilidad de que al menos una de las tres cartas llegue a su destino correcto.**

(Univ. de Granada, 1991)

Si las cartas y los destinatarios correspondientes se numeran con los números 1, 2 y 3, simbolizando por (a, b, c) que la carta numerada con el número a se entrega al destinatario 1, la carta numerada con el número b se entrega al destinatario 2, y la carta numerada con el número c se entrega al destinatario 3, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$

Si A es el suceso "al menos una de las tres cartas llega a su destino correcto:

$$A = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}$$

de donde

$$P(A) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

16.13 Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, también son independientes $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

(Univ. de Madrid)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\bar{A}$ y $\bar{B}$ serán independientes si $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

Aplicando las relaciones de De Morgan y la probabilidad del suceso contrario:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = [1 - P(A)] - P(B) \cdot [1 - P(A)] =$$
$$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow$$

$\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

16.14 Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, también son independientes A y $\bar{B}$.

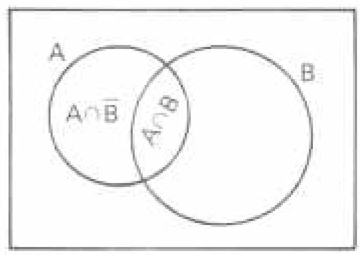
(Univ. de Zaragoza, 1991)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Los sucesos A y $\bar{B}$ serán independientes si se verifica que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$.

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$, y por ser $(A \cap \bar{B})$ y $(A \cap B)$ incompatibles, ya que $(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) =$

$= (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap A) = A \cap (\bar{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$:



$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow \text{ A y } \bar{B} \text{ son independientes.}$$

16.15 Sea A un suceso tal que $0 < P(A) < 1$.

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario $\bar{A}$?
b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿Serán A y B independientes?
c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\bar{C}$ independientes?

(Univ. de Murcia)

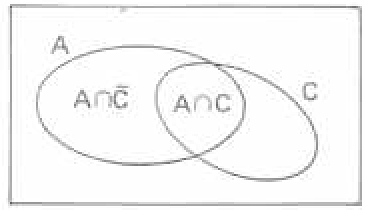
a) $$\left.\begin{array}{l} 0 < P(A) < 1 \\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 < P(\bar{A}) < 1 \Rightarrow P(A) \cdot P(\bar{A}) \neq 0 \\ P(A \cap \bar{A}) = P(\phi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ A y } \bar{A} \text{ no son}$$

independientes.

b) $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$

$P(A) \cdot P(B)$ sólo sería igual a $P(B)$ si $P(A) = 1$, pero como $0 < P(A) < 1$, no se verificará $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o sea que A y B no son independientes (excepto si $B = \phi$).

c) $A = (A \cap \bar{C}) \cup (A \cap C)$
$(A \cap \bar{C}) \cap (A \cap C) = A \cap (\bar{C} \cap C) = A \cap \phi = \phi$ $\Rightarrow$



$P(A) = P(A \cap \bar{C}) + P(A \cap C) \Rightarrow$

$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) \qquad (1)$

Por ser A y C independientes: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, llevando este valor a (1):

$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A) \cdot P(C) = P(A)\,[1 - P(C)] = P(A) \cdot P(\bar{C}) \Rightarrow$ A y $\bar{C}$ son independientes.

16.16 **Demostrar que si los suceso A y B son independientes, se verifica:**

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

(Univ. de Madrid)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= [1 - P(\bar{A})] + [1 - P(\bar{B})] - [1 - P(\bar{A})][1 - P(\bar{B})] =$$
$$= 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) - 1 + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) =$$
$$= 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

16.17 **Hallar $P(A \cap \bar{B})$, conociendo $P(A)$ y $P(A \cap B)$.**

(Univ. de Salamanca)

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

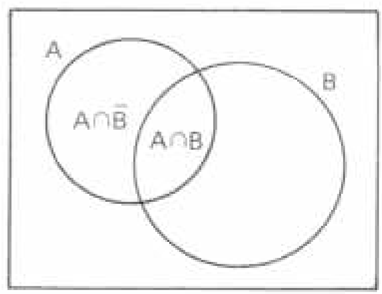
y al ser $(A \cap \bar{B})$ y $(A \cap B)$ sucesos incompatibles, ya que

$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap A) =$

$= A \cap (\bar{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$



16.18 **Sean A y B dos sucesos y A^c el suceso contrario de A. Si son conocidas las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, A^c y $A \cap B$, ¿cómo puedes hallar las probabilidades de los sucesos B, A y $A^c \cap B$?**

(Univ. de Zaragoza)

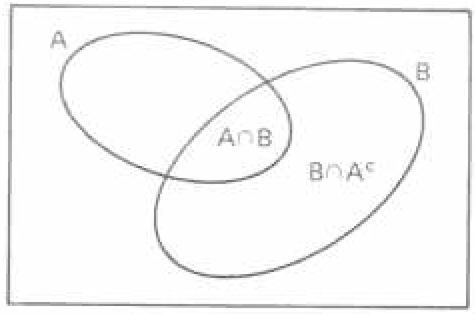
$\left.\begin{array}{l} A \cap A^c = \phi \\ A \cup A^c = \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= P(A \cup B) - 1 + P(A^c) + P(A \cap B)$

$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c) \quad \Rightarrow$

$P(B) = P[(A \cap B) \cup (B \cap A^c)]$



y por ser $A \cap B$ y $B \cap A^c$ incompatibles, ya que

$(A \cap B) \cap (B \cap A^c) = (B \cap A) \cap (A^c \cap B) =$

$= B \cap (A \cap A^c) \cap B = B \cap \phi \cap B = \phi$:

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) \quad \Rightarrow$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$

$$= P(A \cup B) - 1 + P(A^c) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) + P(A^c) - 1$$

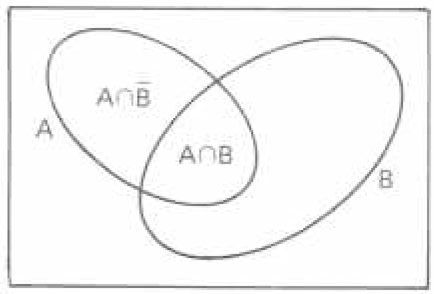
Resumen:

$\boxed{P(A) = 1 - P(A^c)}$, $\boxed{P(B) = P(A \cup B) + P(A^c) + P(A \cap B) - 1}$, $\boxed{P(A^c \cap B) = P(A \cup B) + P(A^c) - 1}$

16.19 **Dados los sucesos A y B, demostrar que**

$$P(A \cap B) \leqslant P(A) \leqslant P(A \cup B)$$

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$



y por ser los sucesos $A \cap \bar{B}$ y $A \cap B$ incompatibles ya que:

$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap A) =$

$= A \cap (\bar{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

y como $P(A \cap \bar{B}) \geqslant 0$: $\quad P(A) \geqslant P(A \cap B) \qquad (1)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, y como de (1) resulta que también $P(B) \geqslant P(A \cap B)$, o lo que es igual: $P(B) - P(A \cap B) \geqslant 0$, resulta:

$$P(A \cup B) \geqslant P(A) \qquad (2)$$

De (1) y (2): $\quad \boxed{P(A \cap B) \leqslant P(A) \leqslant P(A \cup B)}$

16.20 **Estudiar la posible dependencia de dos sucesos, A y B, en los casos a), b), c), indicando cuándo serán independientes:**

a) A y B son incompatibles y de probabilidad no nula.

b) A está incluido en B, y A es un suceso de probabilidad no nula.

c) A es cualquier suceso y $P(B) = 0$.

(Univ. de Navarra, 1991)

a) Por ser A y B incompatibles: $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Por ser $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$: $\quad P(A) \cdot P(B) \neq 0$

$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

A y B no son independientes

b) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

$P(A) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A)$ sólo si $P(B) = 1$

si $P(B) = 1$: $P(A \cap B) = P(A \cdot P(B) \Rightarrow$ A y B son independientes

si $P(B) \neq 1$: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A y B no son independientes

c) Cualesquiera que sean A y B: $A \cap B \subset B \Rightarrow P(A \cap B) \leqslant P(B)$, de donde:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } P(B) = 0: & P(A \cap B) = 0 \\ \text{si } P(B) = 0: & P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot 0 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

los sucesos A y B son independientes.

16.21 **Razonar la afirmación de que si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que $\frac{1}{2}$, la suma de las probabilidades de ambos (por seperado), no puede exceder de $\frac{3}{2}$.**

(Univ. de Madrid)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

$$0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant P(A \cap B) < \frac{1}{2}$$

$$0 \leqslant P(A \cup B) + P(A \cap B) < 1 + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} P(A) + P(B) < \frac{3}{2}$$

16.22 Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$.

a) Probar que si $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, entonces A y B son independientes.

b) Para los mismos valores de P(A) y P(B) dados antes, ¿hay otros valores de $P(A \cup B)$ que hacen que A y B sean independientes?

c) Demostrar que si A y B son independientes, entonces $\bar{A}$ y B son independientes.

(Univ. de Zaragoza, 1991)

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{5},\ P(A \cup B) = \frac{4}{5} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \end{array}\right| \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5+6-8}{10} = \frac{3}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \text{ A y B son independientes.}$$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - P(A \cup B) = \frac{11}{10} - P(A \cup B)$$

Los sucesos A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$\frac{11}{10} - P(A \cup B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}}$$, valor anterior.

c) Está resuelto en el problema 16.14.

16.23 **Dados dos sucesos independientes A y B, la probabilidad de que ocurran los dos a la vez es $\frac{1}{6}$ y de que no ocurra ninguno de los dos $\frac{1}{3}$. Calcular sus probabilidades.**

(Univ. de Oviedo, 1991)
(Univ. de Málaga, 1991)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por ser A y B independientes: } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap B) = \frac{1}{6} \end{array}\right| \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad (2)$$

De (2): $P(A) = \frac{5}{6} - P(B)$, llevando este valor a (1): $\left(\frac{5}{6} - P(B)\right) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$6\left(P(B)\right)^2 - 5 \cdot P(B) + 1 = 0 \Rightarrow P(B) = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

16.24 **Un hombre y una mujer de la misma edad se casan a los 20 años. Las probabilidades de que lleguen a los 70 años son 0,76 para el hombre y 0,82 para la mujer.**

Se pregunta cuál es la probabilidad de que a los 70 años: a) Ambos estén vivos. b) No viva ninguno de los dos. c) Viva solamente la mujer. d) Viva al menos uno de ellos.

(Univ. de las Islas Baleares, 1991)
(Univ. del País Vasco, 1991)

Sea H el suceso "el hombre llega a los 70 años", y M el suceso " la mujer llega a los 70 años". Por las características del problema, se supone que los sucesos H y M son independientes.

a) $P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = 0{,}76 \cdot 0{,}82 = \boxed{0{,}6232}$

b) Si los sucesos H y M son independientes, también son independientes $\overline{H}$ y $\overline{M}$ (véase problema 16.13):

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \cdot P(\overline{M}) = [1 - P(H)][1 - P(M)] = (1 - 0{,}76)(1 - 0{,}82) = 0{,}24 \cdot 0{,}18 = \boxed{0{,}0432}$$

c) Si los sucesos H y M son independientes, también son independientes $\overline{H}$ y M, (16.14):

$$P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \cdot P(M) = [1 - P(H)] \cdot P(M) = (1 - 0{,}76) \cdot 0{,}82 = 0{,}24 \cdot 0{,}82 = \boxed{0{,}1968}$$

d) $P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = P(H) + P(M) - P(H) \cdot P(M) = 0{,}76 + 0{,}82 - 0{,}76 \cdot 82 =$

$$= \boxed{0{,}9568}$$

16.25 **Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva Juan es de 1/3 y la de que lo resuelva Pedro, de 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto? ¿Y de que no sea resuelto?**

(Univ. de León, 1991)

Sea A el suceso "Juan resuelve el problema", y B el suceso "Pedro resuelve el problema". Los sucesos A y B, por las características del enunciado, se consideran independientes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+3-1}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

El suceso N "el problema no es resuelto" es el suceso contrario del suceso $A \cup B$, "el problema es resuelto", de donde:

$$P(N) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

16.26 **Dos sucesos A y B verifican $P(A \cap B) = 0{,}3$; $P(A^c) = 0{,}4$; $P(B^c) = 0{,}5$. Hallar $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.**

(Univ. de Salamanca)

$$P(A^c) = 0{,}4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 \,; \quad P(B^c) = 0{,}5 \Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = \boxed{0{,}8}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

16.27 **Sean A y B dos sucesos cualesquiera de probabilidad no nula e independientes. Justificar si son ciertas las siguientes afirmaciones:**

a) $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(A)$.

b) $P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})$.

c) $P(A \cup \overline{A}) = 0{,}5$.

(Univ. de Córdoba, 1991)

a) Si A y B son independientes, también $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes, (véase problema 16.13), de donde: $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A})$.

En general no se verificará a). Se verificará sólo si $P(A) = P(\overline{A}) = 0{,}5$.

b) Si A y B son independientes, también A y $\overline{B}$ son independientes, (véase problema 16.14), de donde: $P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})$.

c) $A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) \neq 0{,}5$

16.28 **En un espacio probabilístico, consideremos los sucesos A y B, ambos de probabilidad no nula. Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) Si A y B son incompatibles, entonces son independientes.
b) Si A y B son independientes, entonces son incompatibles.
c) Si A y B son independientes: $(PA \cap B) = P(A/B) \cdot P(B/A)$.

(Univ. de Valencia)

a) A y B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

$P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) \neq 0$ $\Bigg|\ \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

A y B son dependientes.

La afirmación del enunciado es FALSA.

b) A y B independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) \neq 0$ $\Bigg|\ \Rightarrow P(A \cap B) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \phi \Rightarrow$

A y B son compatibles.

La afimación del enunciado es FALSA.

c) A y B independientes $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{array} \right. \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B/A)$

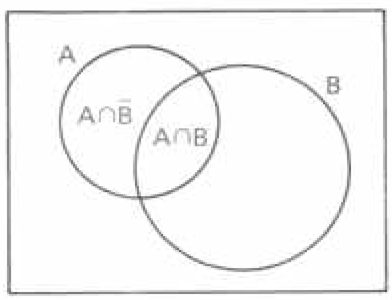
La afirmación del enunciado es VERDADERA.

16.29 **Demostrar que** $\quad P(B/A) + P(\overline{B}/A) = 1$

(Univ. de Madrid)

$$P(B/A) + P(\overline{B}/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}{P(A)} \qquad (1)$$



$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

y por ser $(A \cap \overline{B})$ y $(A \cap B)$ sucesos incompatibles, ya que:

$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap A) =$

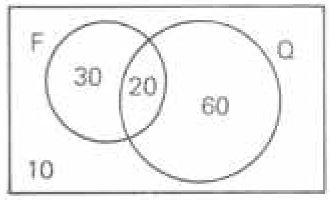
$= A \cap (\overline{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$;

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow$ llevando este valor a (1): $\boxed{P(B/A) + P(\overline{B}/A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1}$

16.30 **En un curso de COU hay 120 alumnos. 50 estudian Francés, 80 Química y 20 estudian Francés y Química. Se elige en ese curso un estudiante al azar, ¿qué probabilidad hay de que no estudie ninguna de las dos asignaturas? . Si se sabe que el alumno elegido estudia Francés, ¿que probabilidad hay de que también estudie Química?**

(Univ. de Salamanca)

Usando los diagramas de Venn se obtiene que si estudian Francés y Química 20 alumnos, habrá 30 alumnos que estudian Francés y no estudian Química, y 60 alumnos que estudian Química y no estudian Francés, siendo 120 − 60 − − 20 − 30 = 10 los alumnos que no estudian ni Francés ni Química.



Aplicando la fórmula de Laplace, la probabilidad de que elegido un alumno al azar no estudie ni Francés ni Química será:

$$P_1 = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10}{120} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Si se sabe que el alumno elegido estudia Francés, los casos posibles quedan reducidos a los 50 alumnos que estudian Francés, y los casos favorables a que estudie también Química serán los 20 alumnos que estudian Francés y Química:

$$P_2 = \frac{20}{50} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

16.31 **Se sortea un viaje a Singapur entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:**

a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

b) Si del afortunado se sabe ya que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

(Univ. de La Laguna—Tenerife)

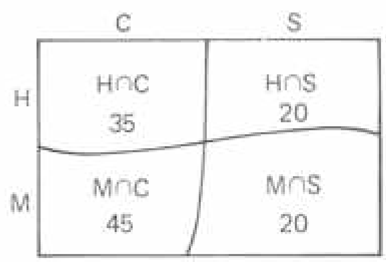
Sea M, H, C y S, respectivamente, los sucesos elegir mujer, hombre, persona casada y persona soltera.

$\text{card}(H \cap C) + \text{card}(H \cap S) + \text{card}(M \cap C) + \text{card}(M \cap S) = 120$ (1)

$\text{card}(M \cap C) + \text{card}(M \cap S) = 65$ (2)

$\text{card}(H \cap C) + \text{card}(M \cap C) = 80$ (3)

$\text{card}(M \cap C) = 45$ (4)



(3) − (4): $\text{card}(H \cap C) = 35$; (2) − (4): $\text{card}(M \cap S) = 20$;

de (1): $\text{car}(H \cap S) = 120 - 35 - 45 - 20 = 20$

a) $$P(H \cap S) = \frac{20}{120} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) El saber que el afortunado es casado equivale a restringir el espacio muestral al suceso C, y los casos favorables a que sea mujer a los sucesos elementales del suceso $M \cap C$:

$$P(M/C) = \frac{45}{80} = \boxed{\frac{9}{16}}$$

16.32 **Una caja contiene tres monedas. Una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire. Hallar la probabilidad de que salga cara.**

(Univ. de Castilla — La Mancha)

Sean: A el suceso "se elige la moneda corriente",
B el suceso "se elige la moneda que tiene dos caras",
D el suceso "se elige la moneda cargada",
C el suceso "sale cara".

Nos piden la probabilidad del suceso $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (D \cap C)$. Como los sucesos $A \cap C$, $B \cap C$ y $D \cap C$ son incompatibles dos a dos:

$$P[(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (D \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C) + P(D \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) +$$

$$+ P(D) \cdot P(C/D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3+6+2}{18} = \boxed{\frac{11}{18}}$$

16.33 **En una bolsa hay 5 bolas rojas, 3 bolas negras y dos bolas blancas. Se extre al azar una bola y sin devolverla, se extre otra.**

a) Calcular la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

b) Calcular la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.

(Univ. Valladolid, 1991)

Sean: R_1 el suceso "la primera bola es roja", R_2 "la segunda bola es roja", N_1 "la primera bola es negra", N_2 "la segunda bola es negra", B_1 "la primera bola es blanca" y B_2 "la segunda bola es blanca".

a) El suceso C "las dos bolas son del mismo color", es:

$$C = (R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2) \Rightarrow P)C) = P[(R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)]$$

y por ser los sucesos $(R_1 \cap R_2)$, $(N_1 \cap N_2)$ y $(B_1 \cap B_2)$ incompatibles dos a dos:

$$P(C) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) +$$

$$+ P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{20+6+2}{90} = \frac{28}{90} = \boxed{\frac{14}{45}}$$

b) El suceso D "las bolas son de distinto color" es el suceso contrario de C, de donde:

$$P(D) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{45-14}{45} = \boxed{\frac{31}{45}}$$

16.34 **Una caja A contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Otra caja B contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Sacamos una bola de la caja A y la introducimos en la caja B. Si a continuación se extrae una bola de la caja B, razona cuál es la porobabilidad de que sea blanca.**

(Univ. de Valencia, 1991)

Sea B_1 el suceso "la bola que sacamos de la caja A y que introducimos en la caja B es blanca"; el suceso N_1 "la bola que sacamos de la caja A y que introducimos en la caja B es negra"; y el suceso B_2 la bola que extraemos de la caja B es blanca". Nos piden la probabilidad del suceso:

$(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$, y por ser incompatibles los sucesos $B_1 \cap B_2$ y $N_1 \cap B_2$:

$$P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2/N_1) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{17}{30}}$$

16.35 **URNA I: Contiene 6 bolas rojas y 4 bolas blancas.**
URNA II: Contiene 4 bolas rojas y 8 bolas blancas.

Se lanza un dado. Si aparece un número menor que 3, nos vamos a la urna I; si el resultado es 3 o más nos vamos a la urna II. A continuación extraemos una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea roja y de la urna II.

b) Probabilidad de que la bola sea blanca.

(Univ. de Castilla — La Mancha, 1991)

a) Sea A el suceso "se obtiene al lanzar un dado un número menor que 3", C el suceso "se obtiene al lanzar un dado un número igual o mayor que 3", R_I el suceso "se saca bola roja de la urna I", R_{II} el suceso "se saca bola roja de la urna II", B_I "se saca bola blanca de la urna I" y B_{II} "se saca bola blanca de la urna II".

Para sacar bola roja de la urna II se tendrá que verificar el suceso $C \cap R_{II}$:

$$P(C \cap R_{II}) = P(C) \cdot P(R_{II}/C) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{12} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) Para sacar bola blanca se tendrá que verificar el suceso $(A \cap B_I) \cup (C \cap B_{II})$, siendo incompatibles los sucesos $A \cap B_I$ y $C \cap B_{II}$:

$$P[(A \cap B_I) \cup (C \cap B_{II})] = P(A \cap B_I) + P(C \cap B_{II}) = P(A) \cdot P(B_I/A) + P(C) \cdot P(B_{II}/C) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{15} + \frac{4}{9} = \frac{6+20}{45} = \boxed{\frac{26}{45}}$$

16.36 **Once bolas que llevan gravados los números del 1 al 11 están repartidas en 3 urnas. Una de estas urnas contiene las bolas con los números 1, 2, 3, 4 y 5, otra las que corresponden a los números 6, 7, 8 y 9 y la tercera a las dos bolas restantes. Elegida una urna al azar se sacan dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?**

(Univ. de Valladolid)

Supongamos que las urnas están numeradas con los números 1, 2 y 3. Sea U_i el suceso "se elige la urna numerada con el número i", y A, B y C los sucesos "se sacan, respectivamente de las urnas nunumeradas con el 1, 2 y 3, dos bolas tales que la suma de sus números sea par".

Nos piden la probabilidad del suceso: $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B) \cup (U_3 \cap C)$.

Por ser los sucesos $U_1 \cap A$, $U_2 \cap B$ y $U_3 \cap C$ incompatibles dos a dos:

$$P[(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B) \cup (U_3 \cap C)] = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap C) =$$

$$= P(U_1) \cdot P(A/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2) + P(U_3) \cdot P(C/U_3) \qquad (1)$$

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

Los casos favorables a sacar dos bolas de la urna U_1 tales que la suma de sus números sea par son: (1, 3), (1, 5), (2, 4) y (3, 5), en total 4, y los casos posibles: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, de donde: $P(A/U_1) =$
$= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Los casos favorables a sacar dos bolas de la urna U_2 tales que la suma de sus números sea par son: (6, 8) y (7, 9), en total 2, y los casos posibles $\binom{4}{2} = 6$, de donde: $P(B/U_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

No hay ningún caso favorable a sacar dos bolas de la urna U_3 tales que la suma de sus números sea par, de donde $P(C/U_3) = 0$.

Sustituyendo estos valores en (1):

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{3} = \frac{2}{15} + \frac{1}{9} = \frac{6+5}{45} = \boxed{\frac{11}{45}}$$

16.37 **Una comisión delegada de un pleno de cierto ayuntamiento está formada por 10 concejales de los cuales 5 pertenecen al partido A, 4 al partido B y 1 al partido C. Se eligen al azar y de forma sucesiva 3 personas de dicha comisión. Calcula la probabilidad de que las tres pertenezcan a:**

a) Partidos distintos.
b) Al partido A.
c) Al partido C.

(Univ. de León, 1991)

Sea A_i, B_i y C_i, respectivamente, los sucesos "el candidato elegido en i lugar pertenece al partido A, B o C".

a) El suceso "elegir tres personas, en forma sucesiva, de partidos distintos" es:

$$D = (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup$$
$$\cup (C_1 \cap B_2 \cap A_3)$$

y por ser incompatibles, dos a dos, los últimos sucesos:

$$P(D) = P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + \cdots + P(C_1 \cap B_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)\cdot P(C_3/A_1 \cap B_2) + \cdots +$$
$$+ P(C_1)\cdot P(B_2/C_1)\cdot P(A_3/C_1 \cap B_2) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5\cdot 4\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot 6 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{12}}$

c) $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1)\cdot P(C_2/C_1)\cdot P(C_3/C_1 \cap C_2) = \frac{1}{10}\cdot 0 \cdot 0 = \boxed{0}$

16.38 **Un archivador tiene 9 cajones. Una carta tiene probabilidad 1/2 de estar en el archivador y, si está en el archivador, tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los 9 cajones.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta esté en el noveno cajón?
b) Abrimos los 8 primeros cajones y la carta no está en ninguno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta esté en el noveno cajón?

(Univ. de Barcelona)

a) Sea A el suceso "la carta está en el archivador" y C_9 el suceso "la carta está en el noveno cajón".

$$P(A \cap C_9) = P(A)\cdot P(C_9/A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

b) Si sabemos que la carta no está en los 8 primeros cajones, la carta estará en el noveno cajón si y solo si está en el archivador, o sea que, la probabilidad de que esté en el noveno cajón, sabiendo que no está en los 8 primeros cajones, es la misma de que esté en el archivador: $\boxed{\frac{1}{2}}$.

16.39 **En cierta ciudad el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar.**

Calcular:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

(Univ. de Zaragoza)
(Univ. de Málaga)

Sea a el número de habitantes, C el suceso "se escoge una persona de cabellos castaños" y O el suceso "se escoge una persona de ojos castaños.

$$\text{card }(C\cap O)+\text{card }(C\cap\bar{O})+\text{card }(\bar{C}\cap O)+\text{card }(\bar{C}\cap\bar{O})=a$$

$$\text{card }(C\cap O)+\text{card }(C\cap\bar{O})=0{,}4\,a \qquad (1)$$

$$\text{card }(C\cap O)+\text{card }(\bar{C}\cap O)=0{,}25\,a \qquad (2)$$

$$\text{card }(C\cap O)=0{,}15\,a \qquad (3)$$

$$(2)-(3):\quad \text{card }(\bar{C}\cap O)=0{,}10\,a\,;$$

$$(1)-(3):\quad \text{card }(C\cap\bar{O})=0{,}25\,a\,;$$

$$\text{card }(\bar{C}\cap\bar{O})=a-0{,}15\,a-0{,}25\,a-0{,}1\,a=0{,}5\,a$$

	O	$\bar{O}$
C	$C\cap O$ 0,15a	$C\cap\bar{O}$ 0,25a
$\bar{C}$	$\bar{C}\cap O$ 0,1a	$\bar{C}\cap\bar{O}$ 0,5a

a) El saber que tiene los cabellos castaños equivale a reducir el espacio muestral a $C=(C\cap O)\cup(C\cap\bar{O})$, y los casos favorables a que tenga los ojos castaños, sabiendo que tiene los cabellos castaños, a los sucesos elementales de $C\cap O$:

$$P(O/C)=\frac{0{,}15\,a}{0{,}15\,a+0{,}25\,a}=\frac{15}{40}=\boxed{\frac{3}{8}}$$

b) El saber que tiene los ojos castaños equivale a reducir el espacio muestral a $O=(C\cap O)\cup(\bar{C}\cap O)$, y los casos favorables a que no tenga cabellos castaños a los sucesos elementales de $\bar{C}\cap O$:

$$P(\bar{C}/O)=\frac{0{,}1a}{0{,}15\,a+0{,}1\,a}=\frac{10}{25}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

c)
$$P(\bar{C}/\bar{O})=\frac{0{,}5\,a}{a}=\boxed{0{,}5}$$

16.40 **Un sistema está formado por dos componentes A y B. El sistema funciona si funciona alguna de sus componentes, la probabilidad de que funcione A es $P(A)=0{,}8$, la de que funcione B es $P(B)=0{,}7$ y $P(A\cap B)=0{,}6$.**

1) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?

2) ¿Cuál es la probabilidad de que funcione la componente A, sabiendo que la componente B no funciona?

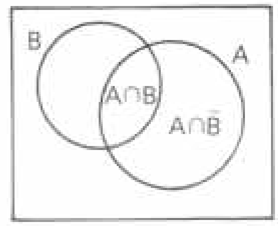
(Univ. de Madrid, 1991)

1) Funcionará alguna de sus componentes si se realiza $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}6 = \boxed{0{,}9}$$

2) Nos piden la probabilidad condicionada de A respecto de $\overline{B}$, o sea $P(A/\overline{B})$:

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \qquad (1)$$



De $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$, por ser $A \cap \overline{B}$ y $A \cap B$ incompatibles:

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

llevando este valor a (1):

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}8 - 0{,}6}{1 - 0{,}7} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

16.41 **Disponemos de un dado que tiene pintadas las caras de la siguiente forma:**

Caras 1, 2, 3, 4 de color verde.
Cara 5 de color rojo.
Cara 6 de colo blanco.

y de dos urnas con la siguiente composición:

Urna I: 6 bolas con brillo, 4 sin brillo.
Urna II: 3 bolas con brillo, 7 sin brillo.

Lanzamos el dado y nos fijamos en el color de la cara:
Si sale verde vamos a la urna I, si sale rojo a la urna II y si sale blanco también a la II.
A continuación extraemos dos bolas una a una sin reemplazamiento. Se pide:

a) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo y que sean de la urna I.
b) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo.

(Univ. Castilla – La Mancha, 1991)

Sea V el suceso "sale cara de color verde al lanzar el dado", R el suceso "sale cara de color rojo", B el suceso "sale cara de color blanco", B_I el suceso las dos bolas que se sacan de la urna I tienen brillo" y B_{II} el suceso "las dos bolas que se sacan de la urna II tienen brillo".

a) El suceso "las dos bolas tienen brillo y son de la urna I" es $V \cap B_I$:

$$P(V \cap B_I) = P(V) \cdot P(B_I/V) = \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) El suceso "las dos bolas tienen brillo" es $(V \cap B_I) \cup (R \cap B_{II}) \cup (B \cap B_{II})$, y como los sucesos $V \cap B_I$, $R \cap B_{II}$ y $B \cap B_{II}$ son incompatibles dos a dos:

$$P[(V \cap B_I) \cup (R \cap B_{II}) \cup (B \cap B_{II})] = P(V \cap B_I) + P(R \cap B_{II}) + P(B \cap B_{II}) =$$

$$= P(V) \cdot P(B_I/V) + P(R) \cdot P(B_{II}/R) + P(B) \cdot P(B_{II}/B) =$$

$$= \frac{4}{6}\left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) = \frac{120 + 6 + 6}{540} = \frac{132}{540} = \boxed{\frac{11}{45}}$$

16.42 **Disponemos de dos monedas, una correcta y otra con dos caras y una urna con diez bolas, cuatro blancas y seis negras. Sacamos dos bolas de la urna, si son del mismo color elegimos la moneda correcta y la lanzamos al aire. En otro caso, elegimos la incorrecta y la lanzamos al aire. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:**

a) Que las dos bolas sean del mismo color.

b) Obtener cara en el lanzamiento de la moneda.

c) Si el resultado del lanzamiento de la moneda ha sido cruz, hallar la probabilidad de que las dos bolas elegidas sean de distinto color.

(Univ. de Córdoba)

a) Sea B el suceso "las dos bolas son blancas" y N el suceso "las dos bolas son negras". Estos sucesos son incompatibles.

El suceso "las dos bolas son del mismo color" es $B \cup N$.

$$P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{10 \cdot 9}{2}} + \frac{\frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{10 \cdot 9}{2}} = \frac{12+30}{90} = \frac{42}{90} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

b) Sea D el suceso "las dos bolas son de distinto color", C es suceso "obtener cara con la moneda correcta" y E el suceso "obtener cara con la moneda de dos caras".

El suceso "obtener cara" será $T = (B \cap C) \cup (N \cap C) \cup (D \cap E)$.

$$P(T) = P[(B \cap C) \cup (N \cap C) \cup (D \cap E)]$$

y por ser los sucesos $B \cap C$, $N \cap C$ y $D \cap E$ incompatibles dos a dos, y D el suceso contrario del suceso $B \cup N$:

$$P(T) = P(B \cap C) + P(N \cap C) + P(D \cap E) = P(B) \cdot P(C/B) + P(N) \cdot P(C/N) + P(D) \cdot P(E/D) =$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{7}{15}\right) \cdot 1 = \frac{7}{30} + \frac{8}{15} = \frac{7+16}{30} = \boxed{\frac{23}{30}}$$

c) Si se ha obtenido cruz es que se ha lanzado la moneda correcta, esto implica que las dos bolas elegidas eran del mismo color, o sea que "sacar las dos bolas de distinto color y cruz en la moneda" es el suceso imposible, la probabilidad pedida es 0.

16.43 **Se tienen dos urnas del mismo aspecto exterior. La primera contiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda, 4 bolas blancas y 3 negras. Una persona se aproxima al azar a una de las urnas y extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?**

(Univ. de Madrid)

Sea U_1 el suceso "elegir la primera urna", U_2 el suceso "elegir la segunda urna", B_1 el suceso "sacar bola blanca de la primera urna" y B_2 el suceso "sacar bola blanca de la segunda urna".

El suceso B "elegir una urna y sacar bola blanca" será: $B = (U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2) \Rightarrow$

$P(B) = P[(U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2)]$ y por ser incompatibles los sucesos $U_1 \cap B_1$ y $U_2 \cap B_2$:

$$P(B) = P(U_1 \cap B_1) + P(U_2 \cap B_2) = P(U_1) \cdot P(B_1/U_1) + P(U_2) \cdot P(B_2/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

16.44 **Para efectuar una rifa se tienen dos urnas A y B, tal que cada una de ellas contiene diez bolas numeradas del 0 al 9.**

Se extrae una bola de la urna A y se eliminan de la urna B las bolas que tienen una numeración mayor que la bola extraída de la urna A. Seguidamente se extrae una bola de la urna B.

El número ganador se obtiene poniendo en el lugar de las decenas el número de la bola extraída de la urna B y en el lugar de las unidades el número de la bola extraído de la urna A.

a) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 48.

b) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 17.

(Univ. de Valladolid, 1991)

a) Sea A el suceso "se extrae de la urna A la bola numerada con el 8", y B el suceso "se extrae de la urna B la bola numerada con el 4":

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{90}}$$

b) Sea C el suceso "se extrae de la urna A la bola numerada con el 7", y D el suceso "se extrae de la urna B la bola numerada con el número 1".

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{80}}$$

16.45 **Se lanzan dos dados al aire y la suma de los puntos obtenidos es 7.**

Hallar la probabilidad de que en uno de los dados aparezca un 1.

(Univ. de Salamanca)

Cada cara del primer dado se combina con cada una de las del segundo dado, habrá $6 \cdot 6 = 36$ casos posibles.

Sea S el suceso "la suma de los puntos obtenidos es 7":

$$S = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

y A el suceso "en uno cualquiera de los dados aparece un 1":

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6,1)\}$$

$$S \cap A = \{(1, 6), (6, 1)\}$$

Nos piden $P(A/S)$:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

También podíamos haber razonado así: El saber que la suma de los puntos obtenidos es 7, equivale a considerar que los casos posibles son los sucesos elementales que componen el suceso S o sea, 6, y los casos favorables los sucesos elementales del suceso $\{(1, 6), (6, 1)\}$, o sea, 2. De donde:

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

16.46 **Se considera el experimento de lanzar una moneda tres veces. Se pide:**

1) **Construir el espacio muestral.**
2) **Suponiendo que la moneda está cargada y que la probabilidad de cara es 0,6. ¿Cuales son las probabilidades de los sucesos elementales? .**
3) **¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan al menos una cara? .**

(Univ. de Madrid, 1991)

1) $\Omega = \{(C\,C\,C), (C\,C\,X), (C\,X\,C), (X\,C\,C), (C\,X\,X), (X\,C\,X), (X\,X\,C), (X\,X\,X)\}$

2) Si la probabilidad de cara es 0,6, la probabilidad de cruz es $1-0{,}6 = 0{,}4$, de donde, considerando que el resultado de cada lanzamiento es independiente del resultado de los otros dos:

$P(CCC) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$; $P(CCX) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$; $P(CXC) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$;

$P(CXX) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}096$; $P(XCC) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$; $P(XCX) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}096$;

$P(XXC) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$; $P(XXX) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

3) El suceso contrario del suceso "obtener al menos una cara" es "obtener tres cruces":

$P(XXX) = 0{,}064 \Rightarrow P(\text{obtener al menos una cara}) = 1 - 0{,}064 = \boxed{0{,}936}$

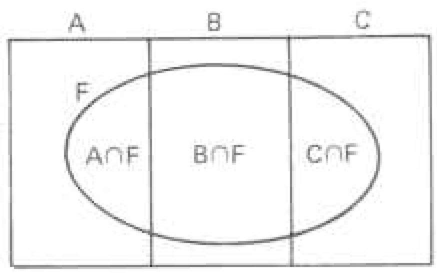
16.47 **Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene diez bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas, en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y en la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?**

(Univ. de León, 1991)

Sea A el suceso "se elige la caja A", B el suceso "se elige la caja B", C el suceso "se elige la caja C, y F el suceso "se toma una bombilla fundida".

El suceso "se toma una bombilla fundida de cualquiera de las cajas" es:

$$F = (A \cap F) \cup (B \cap F) \cup (C \cap F)$$



Los sucesos $A \cap F$, $B \cap F$ y $C \cap F$ son incompatibles dos a dos. La probabilidad pedida es:

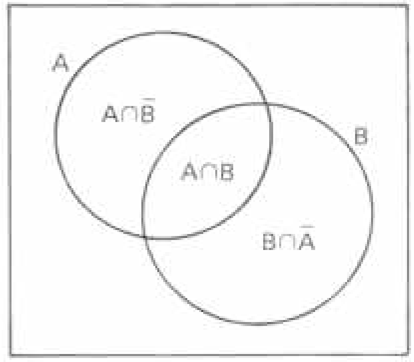
$$P(F) = P[(A \cap F) \cup (B \cap F) \cup (C \cap F)] =$$
$$= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) =$$
$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) + P(C) \cdot P(F/C) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{3}{8} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{48+20+45}{5 \cdot 3 \cdot 8} = \boxed{\frac{113}{360}}$$

16.48 **Conociendo las siguientes probabilidades:**

$$P(A) = 0'3 \ , \quad P(B) = 0'5 \quad y \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0'4$$

calcular $P(B/\overline{A})$ **y** $P[(A-B)/(A \cup B)]$.

(Univ. de Salamanca)



Según la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{1-P(A)} \qquad (1)$$

— de $(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) = B$, por ser $A \cap B$ y $B \cap \bar{A}$ incompatibles:

$$P[(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})] = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \Rightarrow$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \qquad (2)$$

— por las leyes de De Morgan: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'4 \Rightarrow$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0'4 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0'4 = 0'6$$

— de $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0'6 = 0'3 + 0'5 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0'2$

— llevando este último valor a (2): $P(B \cap \bar{A}) = 0'5 - 0'2 = 0'3$

— valor que llevado a (1) nos da: $P(B/\bar{A}) = \dfrac{0'3}{1-0'3} = \dfrac{0'3}{0'7} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$

$$P[(A-B)/(A \cup B)] = \frac{P[(A-B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P[(A \cap \bar{B}) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A \cup B)}$$

Razonando como anteriormente se obtiene: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0'3 - 0'2 = 0'1$

de donde: $P[(A - B)/(A \cup B)] = \dfrac{0'1}{0'6} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

16.49 **Se tienen tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio, con $P(A) = 0'7$, $P(B) = 0'6$, $P(C) = 0'1$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'58$. Se pide:**

a) ¿Son independientes A y B?

b) ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $P(A \cap C)$? Si toma ese valor máximo, calcular $P(\bar{C}/\bar{A})$.

(Univ. de Madrid)

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0'58 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0'58 = 0'42$

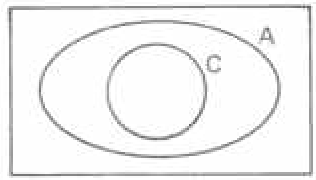
$P(A) = 0'7$, $P(B) = 0'6 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0'7 \cdot 0'6 = 0'42$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

A y B son independientes.

b) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) \qquad (1)$

esta diferencia será máxima cuando $P(A \cup C)$ sea mínima, y esto ocurrirá cuando $A \cup C$ sea igual a A, o sea cuando el suceso C esté contenido en el suceso A. (No puede ser $A \subset C$ puesto que $P(A) \geq P(C)$ según el enunciado).



$A \cup C = A \Rightarrow P(A \cup C) = P(A)$, llevando este valor a (1):

$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A) = P(C) = \boxed{0'1}$

$C \subset A \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{C} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{C} = \bar{A} \Rightarrow P(\bar{C}/\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{C})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \boxed{1}$

16.50 **Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número menor que en la primera.**

(Univ. de Barcelona)

Sean: A_i el suceso "sale el número i en la primera tirada".

M_i el suceso "sale un número menor que i en la segunda tirada".

Nos piden: $P[(A_1 \cap M_1) \cup (A_2 \cap M_2) \cup (A_3 \cap M_3) \cup (A_4 \cap M_4) \cup (A_5 \cap M_5) \cup (A_6 \cap M_6)] =$

(por ser los sucesos $A_1 \cap M_1, \dots, A_6 \cap M_6$ incompatibles dos a dos)

$$= P(A_1 \cap M_1) + P(A_2 \cap M_2) + P(A_3 \cap M_3) + P(A_4 \cap M_4) + P(A_5 \cap M_5) + P(A_6 \cap M_6) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(M_1/A_1) + P(A_2) \cdot P(M_2/A_2) + P(A_3) \cdot P(M_3/A_3) + P(A_4) \cdot P(M_4/A_4) +$$

$$+ P(A_5) \cdot P(M_5/A_5) + P(A_6) \cdot P(M_6/A_6) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36}(0+1+2+3+4+5) = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

16.51 **Se lanzan 7 bolas en 3 cajas A, B y C, de modo que cada bola tenga la misma probabilidad de caer en cualquier caja.**

1º) ¿Cuál es la probabilidad de que A quede sin bola?

2º) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna caja quede sin bola?

3º) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las cajas tengan bola?

(Univ. de Alicante)

1º) Sea A el suceso "la caja A queda sin bola".

Los casos posibles son 3^7, puesto que la primera bola puede caer en cualquiera de las tres cajas. La segunda bola puede caer en cualquier de las tres cajas, estos tres casos se pueden combinar con cada uno de los tres primeros, formando 3×3 maneras distintas de caer las dos primeras bolas. Así, con cada uno de los tres casos de caer las bolas tercera, cuarta, quinta, sexta y séptima, se tienen 3^7 casos posibles.

Los casos favorables al suceso A son 2^7: Cada bola puede caer o en la caja B o en la caja C, o sea, de dos maneras distintas, combinándose cada dos maneras de cada bola con las dos maneras de las restantes.

$$P(A) = \frac{2^7}{3^7} = \boxed{\frac{128}{2187}}$$

2º) Sean B el suceso "la caja B queda sin bola" y C el suceso "la caja C queda sin bola".

El suceso "alguna caja queda sin bola" es igual a $A \cup B \cup C$:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{2^7}{3^7} \\ P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \dfrac{1}{3^7} \\ P(A \cap B \cap C) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P(A \cup B \cup C) = 3 \cdot \frac{2^7}{3^7} - 3 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{2^7 - 1}{3^6} = \boxed{\frac{127}{729}}$$

3º) El suceso D: "todas las cajas tienen bola" es el suceso contrario del suceso "alguna caja queda sin bola":

$$P(D) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{2^7 - 1}{3^6} = \frac{3^6 - 2^7 + 1}{3^6} = \boxed{\frac{602}{729}}$$

16.52 **Un problema debe ser resuelto por tres alumnos. La probabilidad de que lo resuelva el primero es de $\frac{1}{2}$ y la de que lo logre el segundo $\frac{1}{3}$. Además, la probabilidad condicionada de que lo resuelva el segundo sabiendo que lo ha resuelto el primero es $\frac{2}{3}$. Se pide:**

a) Probabilidad de que lo resuelvan el primero y el segundo.

b) Probar que siempre que el segundo alumno resuelve el problema, también lo resuelve el primero.

c) Sabiendo que siempre que el segundo y el primer alumno resuelven el problema, también lo resuelve el tercero, calcular la probabilidad de que los tres resuelvan el problema.

(Univ. de Alicante, 1991)

a) Sea A el suceso "resuelve el problema el primer alumno", B "lo resuelve el segundo" y C "lo resuelve el tercero".

Se sabe que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(B/A) = \frac{2}{3}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) El primer alumno resolverá el problema siempre que lo resuelva el segundo si $P(A/B) = 1$.

Del enunciado y de a) se sabe que $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

c) Si el tercer alumno resuelve el problema siempre que lo resuelven el primero y el segundo, se verifica que $P(C/A \cap B) = 1$.

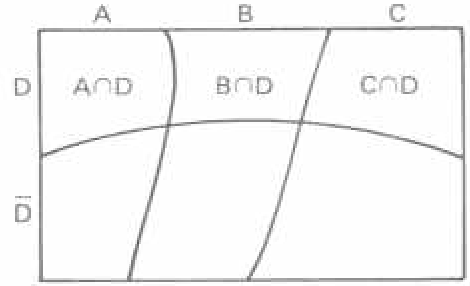
$$P(A \cap B \cap C) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \cdot P(C/A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

16.53 **Tres máquinas A, B, C fabrican tornillos del mismo tipo. Los porcentajes de defectuosos, en cada máquina son respectivamente 1%, 2% y 3%. Se mezclan 120 tornillos: 20 de la máquina A, 40 de la B y 60 de la C. Elegido uno al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?**

(Univ. de Alicante, 1991)

Sean A, B y C, respectivamente los sucesos de que los tornillos sean fabricados por las máquinas A, B y C, y D el suceso de que un tornillo sea defectuoso y $\bar{D}$ de que no sea defectuoso. Los sucesos A, B y C son incompatibles dos a dos, así como los sucesos D y $\bar{D}$.

El saber que el tornillo elegido es defectuoso equivale a restringir el universo a los tornillos defectuosos, y los casos favorables a que haya sido fabricado por la máquina B (sabiendo que es defectuoso) son los del suceso $B \cap D$:



$$P(B/D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(B\cap D)}{P[(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)]} =$$

$$= \frac{P(B\cap D)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)} =$$

$$= \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{\frac{40}{120}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{20}{120}\cdot\frac{1}{100}+\frac{40}{120}\cdot\frac{1}{100}+\frac{60}{120}\cdot\frac{3}{100}} = \frac{80}{20+80+180} = \frac{80}{280} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

16.54 **Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas periféricas de una gran ciudad con arreglo al siguiente reparto de recursos: el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre el servicio de la segunda línea y el 10% el de la tercera línea. Un estudio del Ayuntamiento permite saber que la probabilidad de que, diariamente, un autobús sufra una avería es del 2% en la primera línea, del 4% en la segunda línea y del 1% en la tercera línea.**

a) Calcular la probabilidad de que, en un día, un autobús, sufra avería.

b) Sabiendo que un autobús ha sufrido avería, hallar la probabilidad de que haga la ruta de la primera línea.

(Univ. de Salamanca, 1991)

a) Sea A el suceso "el autobús elegido es de la primera línea", B "el autobús es de la segunda línea", C "el autobús es de la tercera línea" y D "el autobús elegido se avería".

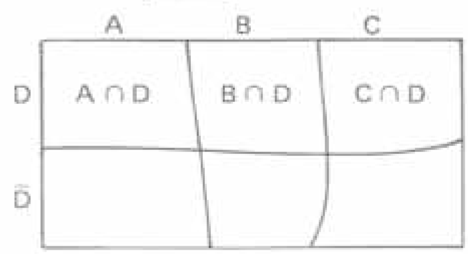
$$D = (A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D) \Rightarrow P(D) = P\big((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)\big) \Rightarrow$$

por ser los sucesos $A\cap D$, $B\cap D$ y $C\cap D$ incompatibles dos a dos

$$P(D) = P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D) = P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C) =$$

$$= 0'6\cdot 0'02 + 0'3\cdot 0'04 + 0'1\cdot 0'01 = 0'012 + 0'012 + 0'001 = \boxed{0'025}$$

b) Suponer que el autobús ha sufrido una avería equivale a restringir el universo al suceso D, o lo que es lo mismo, los casos posibles son los sucesos elementales de suceso D, y los casos favorables de que el autobús pertenezca a la primera línea son los sucesos elementales de $A\cap D$:



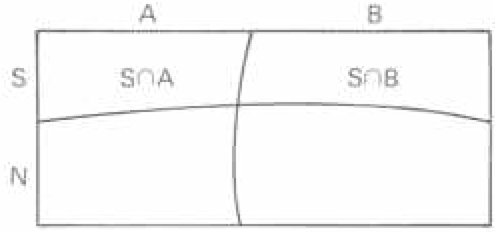
$$P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0'6\cdot 0'02}{0'025} =$$

$$= \frac{0'012}{0'025} = \frac{12}{25} = \boxed{0'48}$$

16.55 **En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es de 0,1. Si éste se produce la probabilidad de que la alarma suene es 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma sin que haya incidente es de 0,03. Si ha funcionado la alarma, calcular la probabilidad de que no haya habido incidente.**

(Univ. de las Islas Baleares, 1991)

Sea A el suceso "ha habido un incedente" y B el suceso "no ha habido un incidente". S el suceso "la alarma suena" y N "la alarma no suena".



El saber que ha funcionado la alarma equivale a restringir el universo al suceso S, y los casos favorable al suceso a que no haya habido incidente a $S\cap B$:

$$P(B/S)=\frac{P(B\cap S)}{P(S)}=\frac{P(B\cap S)}{P[(S\cap A)\cup(S\cap B)]}=$$

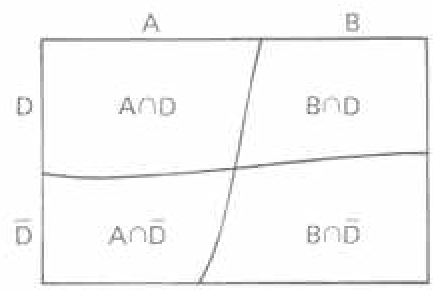
$$=\frac{P(B\cap S)}{P(S\cap A)+P(B\cap S)}=\frac{P(B)\cdot P(S/B)}{P(A)\cdot P(S/A)+P(B)\cdot P(S/B)}=\frac{0{,}9\cdot 0{,}03}{0{,}1\cdot 0{,}95+0{,}9\cdot 0{,}03}=$$

$$=\frac{27}{95+27}=\boxed{\frac{27}{122}}$$

16.56 **Las probabilidades de que cierto artículo esté fabricado por las máquinas A y B, son 0,7 y 0,3 respectivamente. La máquina A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,02 y la B con probabilidad 0,06. Se observa un artículo y resulta ser defectuoso. Hallar la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A.**

(Univ. de Alicante)

Saber que el artículo es defectuoso equivale a limitar los casos posibles a los artículos defectuosos. Los casos favorables a ser fabricados por la máquina A sabiendo que son defectuosos son los del suceso $A\cap D$:



$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A\cap D)}{P[(A\cap D)\cup(B\cap D)]}=$$

$$=\frac{P(A\cap D)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)}=$$

$$=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}02}{0{,}7\cdot 0{,}02+0{,}3\cdot 0{,}06}=\frac{14}{14+18}=\frac{14}{32}=\boxed{\frac{7}{16}}$$

16.57 **En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?

b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

(Univ. de Oviedo)

a) Sean: A_N el suceso "A elige un libro de novela", A_P "A elige un libro de poesía" y B_N "B elige un libro de novela". Nos piden la probabilidad del suceso $(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)$, siendo $A_N \cap B_N$ y $A_P \cap B_N$ sucesos incompatibles:

$$P[(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)] = P(A_N \cap B_N) + P(A_P \cap B_N) = P(A_N) \cdot P(B_N/A_N) + P(A_P) \cdot P(B_N/A_P) =$$

$$= \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{4740}{6320} = \boxed{\frac{237}{316}}$$

b) El saber que B eligió novela equivale a restringir el espacio muestral al suceso: $(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)$, y el suceso de los casos favorables a que A haya seleccionado un libro de poesía al suceso $A_P \cap B_N$:

$$P(A_P/B_N) = \frac{P(A_P \cap B_N)}{P[(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)]} = \frac{P(A_P) \cdot P(B_N/A_P)}{P(A_N) \cdot P(B_N/A_N) + P(A_P) \cdot P(B_N/A_P)} =$$

$$= \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{\frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}} = \frac{1200}{4740} = \boxed{\frac{60}{237}}$$

16.58 **Un estudiante cuenta, para un examen, con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realice el examen es 0,9 y, en caso contrario, de 0,5.**

a) Si realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?

b) Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

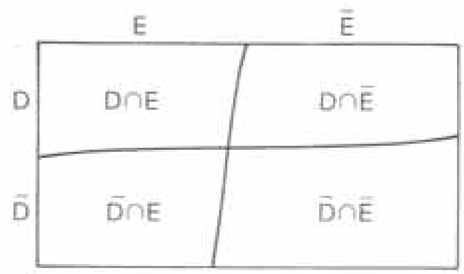
(Univ. de las Islas Baleares)

Sea D el suceso: "oye el despertador", y $\overline{D}$ "no oye el despertador": $P(D) = 0{,}8 \Rightarrow P(\overline{D}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Sea E el suceso: "realiza el examen", y $\overline{E}$ "no realiza el examen".

$$P(E/D) = 0{,}9 \Rightarrow P(\overline{E}/D) = 0{,}1$$

$$P(E/\overline{D}) = 0{,}5 \Rightarrow P(\overline{E}/\overline{D}) = 0{,}5$$



a) Si realiza el examen, los casos posibles quedan reducidos al suceso E y los casos favorables a que haya oído el despertador a $(D \cap E)$:

$$P(D/E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{P(D \cap E)}{P[(D \cap E) \cup (\overline{D} \cap E)]} =$$

$$= \frac{P(D \cap E)}{P(D \cap E) + P(\overline{D} \cap E)} = \frac{P(D) \cdot P(E/D)}{P(D) \cdot P(E/D) + P(\overline{D}) \cdot P(E/\overline{D})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \frac{72}{82} = \boxed{\frac{36}{41}}$$

b) $$P(\overline{D}/\overline{E}) = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{E})}{P[(D \cap \overline{E}) \cup (\overline{D} \cap \overline{E})]} = \frac{P(\overline{D}) \cdot P(\overline{E}/\overline{D})}{P(D) \cdot P(\overline{E}/D) + P(\overline{D}) \cdot P(\overline{E}/\overline{D})} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

16.59 **Un armario tiene dos cajones. El cajón nº 1 contiene 4 monedas de oro y 2 de plata. El cajón nº 2 contiene 3 monedas de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:**

a) Probabilidad de que se haya abierto el cajón nº 2 y se haya extraido una moneda de oro.

b) Probabilidad de que se haya abierto el cajón nº 1, sabiendo que se ha extraido una moneda de oro.

(Univ. de Valladolid)

a) Sea A el suceso "se abre el cajón número 1", B el suceso "se abre el cajón número 2", O el suceso "se extrae una moneda de oro" y N el suceso "se extrae una moneda de plata".

$$P(B \cap O) = P(B) \cdot P(O/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) El saber que se ha extraido una moneda de oro equivale a reducir el espacio muestral al suceso $(A \cap O) \cup (B \cap O)$, y el suceso de los casos favorables a abrir el cajón número 1 sabiendo que se ha extraido una moneda de oro al suceso $A \cap O$:

$$P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P[(A \cap O) \cup (B \cap O)]}$$

y por ser los sucesos $A \cap O$ y $B \cap O$ incompatibles:

$$P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(A \cap O) + P(B \cap O)} = \frac{P(A) \cdot P(O/A)}{P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{4}{4+3} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

16.60 **En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:**

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A? .

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

Sean A, B y C los sucesos: "se elige el llavero A", "se elige el llavero B" y "se elige el llavero C", y S el suceso "se elige la llave que abre el trastero".

a) Se acertará con la llave si se realiza el suceso $T = (A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)$, de donde:

$$P(T) = P[(A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)]$$

y por ser los sucesos $A \cap S$, $B \cap S$ y $C \cap S$ incompatibles dos a dos:

$$P(T) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{56 + 40 + 35}{840} = \boxed{\frac{131}{840}}$$

b) $P(C \cap \overline{S}) = P(C) \cdot P(\overline{S}/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \boxed{\frac{7}{24}}$

c) El saber que la llave escogida es la correcta equivale a restringir el espacio muestral al suceso T, y el suceso de los casos favorables a que la llave pertenezca al llavero A al suceso $A \cap S$:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(T)} = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{840}{15 \cdot 131} = \boxed{\frac{56}{131}}$$

16.61 **Suponiendo que la riqueza es independiente del sexo, calcular:**

a) **Las probabilidades que faltan en la tabla**

	Rico/a	Pobre	Total
Hombre	—	—	0,607
Mujer	—	—	0,393
Total	0,002	—	

b) **La probabilidad de que sabiendo que una persona no es pobre que sea hombre.**

c) **La probabilidad de que una persona sea rica o mujer.**

(Univ. de Córdoba, 1991)

a) Sea H el suceso "la persona es hombre", M "es mujer", R "es rica" y $\overline{R}$ "es pobre".

Los sucesos R y $\overline{R}$ son contrarios: $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}002 = \underline{0{,}998}$

Por ser la riqueza independiente del sexo: H es independiente de R y $\overline{R}$, y M es independiente de R y $\overline{R}$:

$$P(H \cap R) = P(H) \cdot P(R) = 0{,}607 \cdot 0{,}002 = \underline{0{,}001214}$$

$$P(M \cap R) = P(M) \cdot P(R) = 0{,}393 \cdot 0{,}002 = \underline{0{,}000786}$$

$$\left.\begin{array}{l} H = (H \cap R) \cup (H \cap \overline{R}) \\ H \cap R \text{ y } H \cap \overline{R} \text{ incompatibles} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} P(H) = P(H \cap R) + P(H \cap \overline{R}) \Rightarrow \\ 0{,}607 = 0{,}001214 + P(H \cap \overline{R}) \Rightarrow P(H \cap \overline{R}) = \underline{0{,}605786} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = (M \cap R) \cup (M \cap \overline{R}) \\ M \cap R \text{ y } M \cup \overline{R} \text{ incompatibles} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap \overline{R}) \Rightarrow \\ 0{,}393 = 0{,}000786 + P(M \cap \overline{R}) \Rightarrow P(M \cap \overline{R}) = \underline{0{,}392214} \end{array}$$

El cuadro de probabilidades será:

	R	$\overline{R}$	Total
H	0,001214	0,605786	0,607
M	0,000786	0,392214	0,393
Total	0,002	0,998	

b) Si una persona no es pobre es que es rica. Saber que una persona es rica equivale a restringir el universo al suceso R, y los sucesos favorables al suceso de que sea hombre sabiendo que es rica quedan reducidos a los sucesos elementales de $H \cap R$:

$$P(H/R) = \frac{P(H \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}001214}{0{,}002} = \boxed{0{,}607}$$

c) $P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) = 0{,}002 + 0{,}393 - 0{,}00786 = \boxed{0{,}38714}$

16.62 **En una manzana de casas hay 10 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:**

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Calcular la probabilidad de que en cierto día se encuentren 8 automóviles aparcados.

(Univ. de Oviedo, 1991)

a) Es una probabilidad binomial en la que $p = 0{,}4$ y $q = 1 - p = 0{,}6$.

b) $\binom{10}{8}(0{,}4)^8(0{,}6)^2 = \binom{10}{2}(0{,}4)^8(0{,}6)^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}0006553 \cdot 0{,}36 = \boxed{0{,}0106158}$

16.63 **Explica cuál es la fórmula de la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras. Supongamos ahora que se han lanzado tres monedas bien construidas. Se pide:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenido sea 1?

(Univ. de Valencia, 1991)

Se trata de una probabilidad binomial en la que $p = 0{,}5$ y $q = 1 - p = 0{,}5$. La probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtengan x caras es:

$$\binom{3}{x}(0{,}5)^x \cdot (0{,}5)^{3-x} = \binom{3}{x}(0{,}5)^3$$

a) $\binom{3}{1}(0{,}5)^1(0{,}5)^2 = 3 \cdot (0{,}5)^3 = \boxed{0{,}375}$

b) $\binom{3}{3}(0{,}5)^3(0{,}5)^0 = (0{,}5)^3 = \boxed{0{,}125}$

c) Suponer que se ha obtenido un número impar de caras equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de obtener un número impar de caras. La probabilidad pedida es:

$$P = \frac{\text{Probabilidad de obtener una cara}}{\text{Probabilidad de obtener 1 cara o 3 caras}} = \frac{0{,}375}{0{,}375 + 0{,}125} = \boxed{0{,}75}$$

16.64 **Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya:**

a) Como mucho tres niñas.

b) Al menos una niña.

c) Al menos ocho niños.

d) Al menos una niña y un niño.

(Univ. de La Laguna, Tenerife, 1991)

Tenemos una probabilidad binomial, en la que $p = 0{,}5$ es la probabilidad de que haya una niña y $q = 1 - p = 0{,}5$ es la probabilidad de que haya un niño.

a) $P_a = \binom{10}{0}(0,5)^0(0,5)^{10} + \binom{10}{1}(0,5)^1(0,5)^9 + \binom{10}{2}(0,5)^2(0,5)^8 + \binom{10}{3}(0,5)^3(0,5)^7 =$

$= (1 + 10 + 45 + 120)\,(0,5)^{10} = \boxed{0,171864}$

b) El suceso contrario de "al menos una niña" es "los 10 son niños", de donde:

$P_b = 1 - \binom{10}{0}(0,5)^0(0,5)^{10} = 1 - (0,5)^{10} = \boxed{0,9990235}$

c) $P_c = \binom{10}{0}(0,5)^0(0,5)^{10} + \binom{10}{1}(0,5)^1(0,5)^9 + \binom{10}{2}(0,5)^2(0,5)^8 = (1 + 10 + 45)\,(0,5)^{10} =$

$= \boxed{0,054684}$

d) El suceso contrario de "al menos una niña y un niño" es "todos son niñas o todos son niños":

$P_d = 1 - \binom{10}{10}(0,5)^{10}(0,5)^0 - \binom{10}{0}(0,5)^0(0,5)^{10} = 1 - 2\cdot(0,5)^{10} = \boxed{0,998047}$

16.65 Suponiendo que cada nacido tenga probabilidad de 0,49 de ser varón, hallar la probabilidad de que una familia con cuatro hijos tenga:

a) Tres niños y una niña.

b) Los tres mayores niños.

c) Al menos dos niños.

(Univ. de Navarra, 1991)

Si la probabilidad de que un nacido sea niño es $p = 0,49$, la probabilidad de que sea niña es $q = 1 - p = 0,51$.

a) Por la fórmula de Bernouilli:

$$P_a = \binom{4}{3}(0,49)^3(0,51) = 4\cdot 0,117649\cdot 0,51 = 0,2400039 \approx \boxed{0,24}$$

b) Si V_i es el suceso "el nacido en i lugar es niño" y N_i el suceso "el nacido en i lugar es niña", el suceso "los tres mayores son niños" es $B = (V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cup N_4)$, de donde, por ser los sucesos $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$ y $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap N_4$ incompatibles, y los sucesos V_i y V_j, $i \neq j$, y V_i y N_j, $i \neq j$, independientes dos a dos:

$P(B) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \cap N_4) = P(V_1)\cdot P(V_2)\cdot P(V_3)\cdot P(V_4) +$

$+ P(V_1)\cdot P(V_2)\cdot P(V_3)\cdot P(N_4) = 0,49\cdot 0,49\cdot 0,49\cdot 0,49 + 0,49\cdot 0,49\cdot 0,49\cdot 0,51 =$

$= 0,057648 + 0,0600009 = 0,1176489 \approx \boxed{0,12}$

c) El suceso contrario "de al menos dos niños" es "tres o cuatro niñas".

$P_c = 1 - \binom{4}{3}(0,51)^3\cdot(0,49) - \binom{4}{4}(0,51)^4 = 1 - 4\cdot(0,51)^3\cdot(0,49) - (0,51)^4 =$

$= 1 - 0, - 0,067652 = 0,6723521 \approx \boxed{0,67}$

16.66 **Una encuesta revela que el 20 % de la población es favorable a un determinado político. Elegidas seis personas al azar, se desea saber:**

a) Probabilidad de que las seis personas sean favorables al político.
b) Probabilidad de que las seis personas le sean desfavorables.
c) Probabilidad de que menos de tres personas le sean favorables.

(Univ. de Málaga, 1991)

La probabilidad de que elegida una persona sea favorable al político es 0,2, y la probabilidad de que sea desfavorable es 0,8.

a) $(0'2)^6 = \boxed{0{,}000064}$

b) $(0{,}8)^6 = \boxed{0{,}262144}$

c) $\binom{6}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^6 + \binom{6}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^5 + \binom{6}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^4 = (0{,}8)^6 + 6 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}8)^5 +$

$+\ 15 \cdot (0{,}2)^2(0{,}8)^4 = 0{,}262144 + 0{,}393216 + 0{,}24576 = \boxed{0{,}90112}$

16.67 **La probabilidad de que un proyectil de en el blanco es 0,80. Si se lanzan 5 proyectiles se pide:**

1) Probabilidad de que los 5 den en el blanco.
2) Probabilidad de que alguno de en el blanco.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea A el suceso "los cinco proyectiles dan en el blanco", B el suceso "alguno de los cinco proyectiles dan en el blanco" y C "ninguno de los de los cinco proyectiles dan en el blanco".

1) $P(A) = (0{,}8)^5 = \boxed{0{,}32768}$

2) Los sucesos B y C son contrarios.

$P(C) = (0{,}2)^5 \Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - (0{,}2)^5 = 1 - 0{,}00032 = \boxed{0{,}99968}$

16.68 **Se tira una moneda repetidamente hasta que salga cara. Calcular la probabilidad de que haya que tirar la moneda menos de cinco veces.**

(Univ. de Barcelona, 1991)

Sea A el suceso "sale cara en alguna de las cuatro primeras tiradas", y B el suceso "sale cruz en las cuatro primeras tiradas".

Los sucesos A y B son contrarios.

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2^4} = \boxed{\frac{15}{16}}$$

16.69 **Si el 20% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos elegidos al azar:**

a) Uno es defectuoso.

b) A lo más dos son defectuosos.

(Univ. de Extremadura, 1991)

La probabilidad de que un cerrojo elegido al azar sea defectuoso es $p = 0{,}2$, y de que no sea defectuoso: $q = 1 - p = 0{,}8$. Tenemos una probabilidad binomial.

a) $\binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3 = 4\cdot(0,2)(0,8)^3 = \boxed{0{,}4096}$

b) Podrá haber 0, 1 ó 2 defectuosos:

$$\binom{4}{0}(0,2)^0(0,8)^4 + \binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3 + \binom{4}{2}(0,2)^2\cdot(0,8)^2 =$$

$$= 1\cdot(0,8)^4 + 0{,}4096 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(0,2)^2(0,8)^2 = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = \boxed{0{,}9728}$$

16.70 **En un torneo de ajedrez los soviéticos Popov y Filipov disputan la final. Gana el que antes gane 5 partidas. Popov ganó la primera partida, pero Filipov es igual de bueno que él. Diga qué probabilidad tiene Popov de ganar el torneo, sin contar las tablas.**

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

Popov ganará si:

— gana las cuatro siguientes partidas: $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

— gana tres de las cuatro siguientes partidas y la sexta: $P_2 = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}$

— gana tres de las cinco siguientes partidas y la séptima: $P_3 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$

— gana tres de las seis siguientes partidas y la octava: $P_4 = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}$

— gana tres de las siete siguientes partidas y la novena: $P_5 = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}$

La probabilidad pedida es la suma de todos los resultados anteriores:

$$P = \frac{1}{2^4} + 4\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{1}{2^6} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{1}{2^7} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8}(2^4 + 4\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 20\cdot 2 + 35) =$$

$$= \boxed{\frac{163}{256}}$$

APENDICE

COMBINATORIA

VARIACIONES. Dado el conjunto C de m elementos, llamaremos **variación de orden n**, a todo subconjunto de C formado por n elementos ordenados, considerando que dos variaciones son distintas cuando *difieran en algún elemento*, y si constan de los mismos elementos, difieran en el *orden* de colocación, $(0 < n \leq m)$.

Toda aplicación inyectiva del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en el conjunto $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ determina una variación de orden n de los m elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ en este orden.

El número de variaciones de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: V_m^n o $V_{m,n}$

$$\boxed{V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$$

V_m^n es igual al producto de n factores decrecientes a partir de m.

$V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$; $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Si cada elemento de C puede figurar cualquier número de veces en una misma variación, tendremos las **variaciones con repetición.**

Toda aplicación de $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ determina una variación con repetición de orden n de los elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ en este orden.

n puede ser menor, igual o mayor que m.

El número de variaciones con repetición de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: RV_m^n, o $R\,V_{m,n}$

$$\boxed{RV_m^n = m^n}$$

PERMUTACIONES. Las variaciones de orden m formadas con m elementos, se llaman permutaciones.

Dos permutaciones distintas están formadas por los mismos elementos, difieren tan solo en el *orden* de colocación de éstos.

Toda aplicación biyectiva del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ en el conjunto $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ determina una permutación de los elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ en este orden.

El número de permutaciones de m elementos lo simbolizaremos por: $\mathbf{P}_m$

$$\boxed{\mathbf{P}_m = m(m-1)(m-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!}$$

Permutaciones con repetición de m elementos entre los que hay α iguales entre sí, otros β iguales entre sí, . . . , otros λ iguales entre sí, son los distintos grupos ordenados de m elementos, considerando que dos grupos son distintos cuando difiere el orden de colocación de los m elementos.

Su número lo simbolizaremos por $P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$

$$\boxed{P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{\alpha!\cdot\beta!\cdots\lambda!}}$$

COMBINACIONES. Dado un conjunto de m elementos, llamaremos **combinación de orden n,** a todo subconjunto de C formado por n elementos.

La variación $\{a, b, c\}$ la representaremos por abc o (a, b, c).

Dos combinaciones son distintas cuando difieren en algún elemento. El orden no se considera.

El número de combinaciones de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: C_m^n o $C_{m,n}$

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!\ (m-n)!} = \frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots.(m-n+1)}{n!}}$$

$C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$; $C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$; $C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$

Combinaciones con repetición de m elementos de orden n, son los distintos grupos de n elementos, distintos o repetidos, elegidos entre los m dados, considerando que dos grupos son iguales cuando están formados por los mismos elementos repetidos igual número de veces.

Su número lo simbolizaremos por RC_m^n o $RC_{m,n}$

$$\boxed{RC_m^n = C_{m+n-1}^n}$$

NUMEROS COMBINATORIOS. Son los de la forma: $\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$

Se simboliza por $\binom{m}{n}$ y se lee: m sobre n.

$$\boxed{\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\ (m-n)!}}$$

Propiedades:

$$C_m^n = \binom{m}{n}$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\ m!} = 1 \qquad \text{(por convenio } 0! = 1)$$

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

POTENCIA DE UN BINOMIO.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{h} a^{n-h}b^h + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Esta fórmula se llama **binomio de Newton.** Los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

Hallando uno de los coeficientes: $\binom{n}{h}$, el siguiente es $\binom{n}{h+1} = \binom{n}{h}\dfrac{n-h}{n+1}$

Cuando n no es elevado, los coeficientes de $(a+b)^n$ se cal[illegible]nente por el siguiente cuadro llamado triángulo de Tartaglia:

$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
......	....

que se obtiene escribiendo en primer lugar las dos oblicuas 1, 1, 1, ... Después, cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima.

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

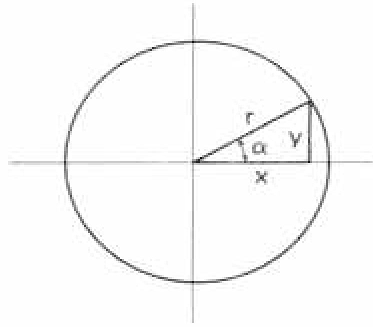
FORMULAS DE TRIGONOMETRIA PLANA

Definición de las funciones trigométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

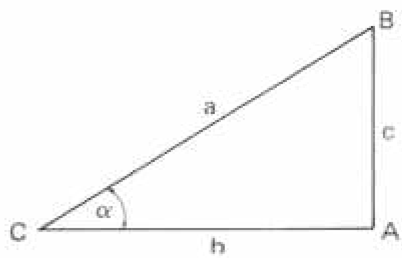


— para ángulos menores de 90° (de un triángulo rectángulo)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$



Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto.

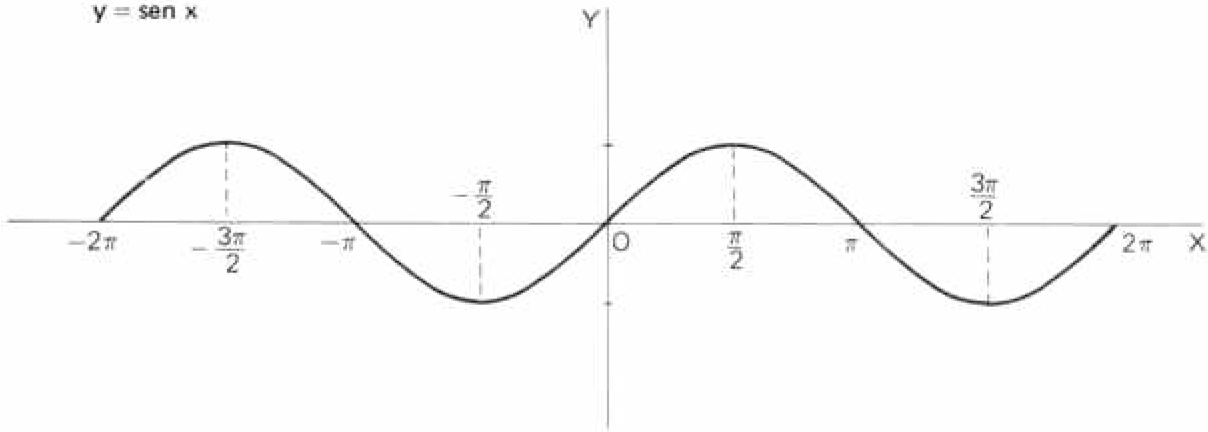
Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido.

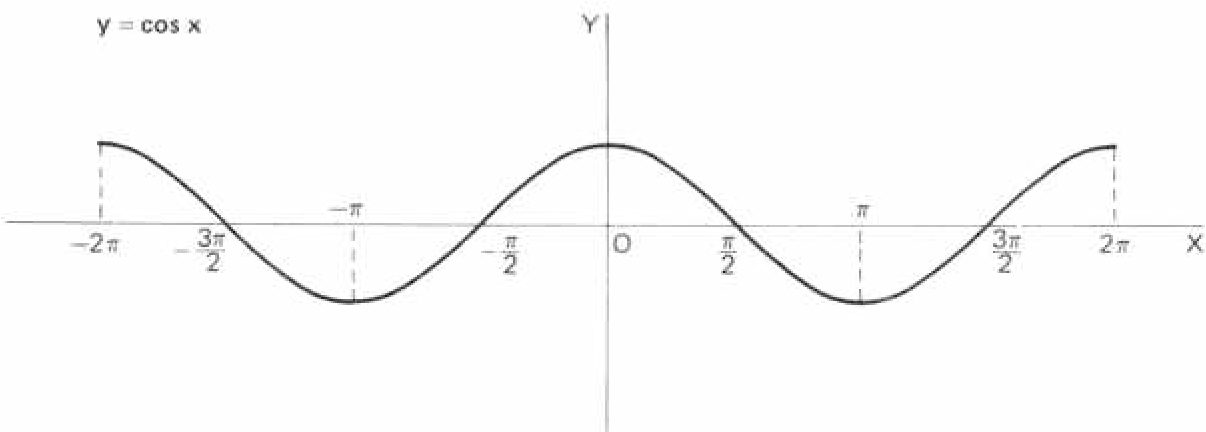
Valor del seno, coseno y tangente de los ángulos más usados:

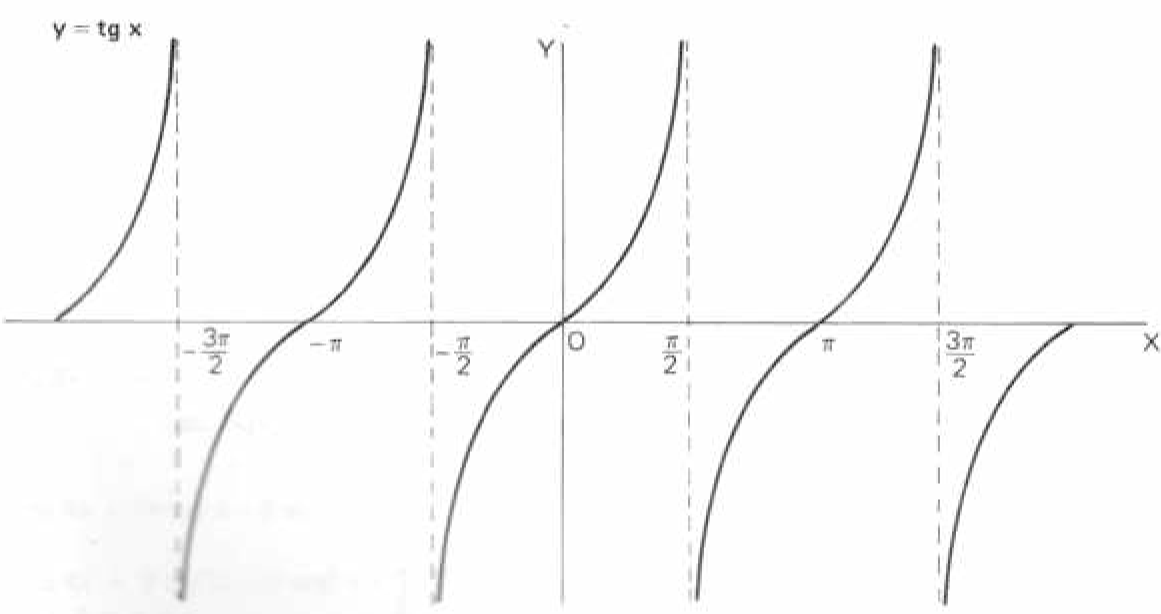
	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Relación entre los valores de las funciones de ángulos complementarios, suplementarios, etc.

	$90° - \alpha$	$180° - \alpha$	$-\alpha$	$90° + \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$
sen	$\cos \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$-\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{sen} \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\operatorname{sen} \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{sen} \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$


y = sen x
Y
X
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y = cos x
Y
X
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y = tg x
Y
X
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

Fórmulas más usadas.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \;; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (5) \;; \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

haciendo $y = x$ en (1), (3) y (5):

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} & (6) \\[2ex] \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} & (7) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (8)$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}$$

(dividiendo numerador y denominador por $\cos^2 \frac{x}{2}$)

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (9)$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (10)$$

Transformación de la suma, o diferencia, de senos y cosenos en producto:

Sumando y restando (1) y (2), (3) y (4)

$$\left. \begin{array}{lll} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y & (11) \\ \operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} y & (12) \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y & (13) \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y & (14) \end{array} \right| \quad \text{haciendo} \left. \begin{array}{l} x + y = A \\ x - y = B \end{array} \right| \Rightarrow \quad x = \frac{A+B}{2},\; y = \frac{A-B}{2}$$

de donde:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \cdot \text{sen } \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \qquad (15)$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A-B}{2} \qquad (16)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \qquad (17)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \text{sen } \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A-B}{2} \qquad (18)$$

Transformación del producto de senos y cosenos en suma:

De (11): $$\text{sen } x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\text{sen } (x+y) + \text{sen } (x-y)\Big) \qquad (19)$$

" (13): $$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos (x+y) + \cos (x-y)\Big) \qquad (20)$$

" (14): $$\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2}\Big(\cos (x-y) - \cos (x+y)\Big) \qquad (21)$$

Otras fórmulas de interés:

$$\text{sen } (a+b+c) = \text{sen } a \cdot \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \cos a \cdot \cos c + \text{sen } c \cdot \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } c$$

$$\cos (a+b+c) = \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \cos c - \text{sen } a \cdot \text{sen } c \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos a$$

$$\text{tg } (a+b+c) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c - \text{tg } a \cdot \text{tg } b \cdot \text{tg } c}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b - \text{tg } a \cdot \text{tg } c - \text{tg } b \cdot \text{tg } c}$$

$$\text{sen } 3x = 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x - \text{sen}^3 x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 - 3 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\text{tg } 3x = \frac{3 \text{ tg } x - \text{tg}^3 x}{1 - 3 \text{ tg}^2 x}$$

$$\text{sen } 4x = (4 \text{ sen } x - 8 \text{ sen}^3 x) \cos x$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

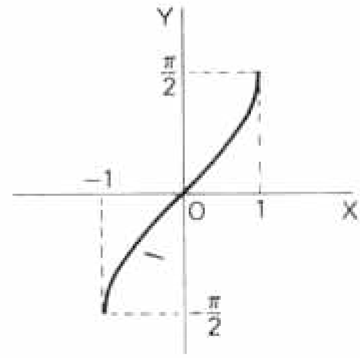
$$\text{tg } 4x = \frac{4 \text{ tg } x - 4 \text{ tg}^3 x}{1 - 6 \text{ tg}^2 x + \text{tg}^2 x}$$

Funciones trigonométricas inversas.

Función arco seno:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc sen } x \\ x \in [-1, 1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \text{sen } y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$

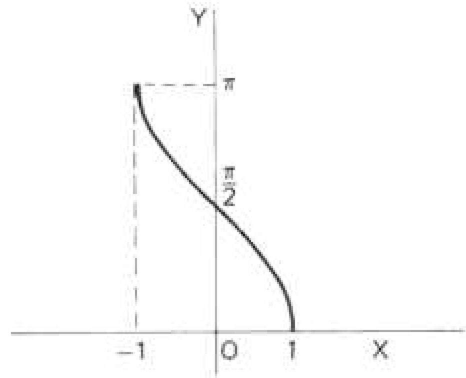
x	-1		0		1
arc sen x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Función arco coseno:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc cos } x \\ x \in [-1, 1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{array}}$$

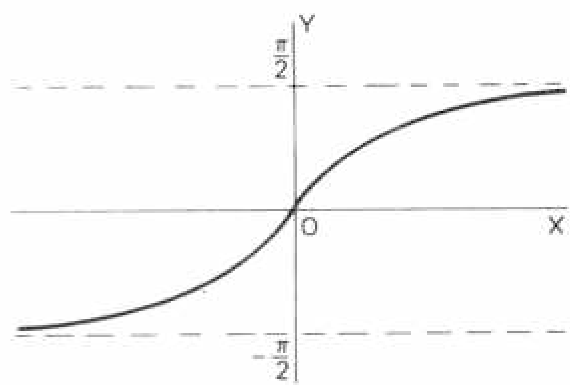
x	-1		0		1
arc cos x	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Función arco tangente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc tg } x \\ x \in \mathbf{R} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \text{tg } y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arc tg x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



Propiedades.

$\text{arc sen}(-x) = -\text{arc sen } x \qquad \forall x \in [-1, 1]$

$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]$

$\text{arc tg}(-x) = -\text{arc tg } x \qquad \forall x \in \mathbf{R}$

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EXÁMENES DE MATEMÁTICAS I DE SELECTIVIDAD

525 problemas, totalmente resueltos, seleccionados de los exámenes de Selectividad de los últimos años, junto a más de 250 ejercicios intercalados en el denso resumen teórico con el que empieza cada capítulo, hacen de este libro la mejor publicación sobre el temario de Matemáticas I.

Tébar

ISBN 84-7360-131-9
9 788473 601313